因果率の回路の計算

蔵　　琢　也

蔵　　研　也

要　約

我々は、論文（１）の問題１で幾つかの思考実験を示し、因果が部分的に破れている可能性が高いと述べた。本論文ではその補足と、さらに進んで、未来から過去への因果が存在する、つまり因果が閉回路をなしていたとき、どのような奇妙なことが起こるかを例示する。それも言葉の上での概念だけではなく、簡単な場合の生起確率の計算も行う。これらの計算によって、因果が破れていても、多世界解釈に基づけば、それが決定的な矛盾を生じるわけではないことが示される。むしろ多世界解釈の真の有効性を示す重要な根拠となる。さらに因果回路があると、過去と未来に対して強い拘束が生じて、世界の分岐が大幅に減ることが起こる。つまり、多世界解釈の欠点の一つだと考えられている野放図でインフレ的な世界分岐が起こらなくなるのである。

1　因果率の問題

我々は論文（１）の問題１において、因果率が厳密には成立しない可能性を論じた。（１）の問題１Ａの論旨を簡潔にまとめるなら、四次元の特殊相対性理論とアインシュタイン因果率と両立する場と場や粒子の相互作用項は自明なもの以外に存在しないか、あっても極めて特殊なものしかないということである。事実、矛盾のない４次元の非自明な場の理論は知られていない（註２，註３）。さらに、５次元以上では存在しないことさえ、証明されている。現在の場の理論は実験に矛盾しないような限定された計算法が知られているだけで、どんな計算をしても矛盾が出ないとは保証されていないのである。そして、矛盾しないことを証明できていないだけでなく、４次元以上で非自明なものは一例も構成されていない。我々の結論は、それは元来、不可能であるというものである。トンネル速度のような相互作用項が絡む場合、因果を破る場合がどうしても出て来てしまう。だからこそ、矛盾のない構成的な場の理論は構成できないということである。むろん、現在のほとんどの物理学者はこれを全く重視していない。あえて好意的に言えば、超弦理論やそれを拡張したM理論などが完成すれば、このような矛盾は自然に解消されるかもしれないが、これは希望的な予測である。

我々の予想は逆である。厳密に通常因果が保たれるということは希なこと（測度０）であり、シュレディンガー、ディラック、クライン・ゴルドン、プロカ、マクスウェルをふくめ常識的な波動方程式のすべてにおいて、有限な正の障壁の片側に、有界な波動関数の初期値があった場合、ほとんどすべてのトンネル時間に超光速の部分、つまり初期値の分布から見て光円錐の外に出てしまう部分が、できてしまうと予想する。偶然超光速の部分が出ない初期値は非常に希で、障壁と初期の分布に適当な測度を入れれば０であろう。つまり、ほとんどすべての障壁とほとんどすべての初期関数に対して超光速部分は存在する。反対に、超光速の部分が都合良く打ち消して存在しないような、有界で正の障壁ポテンシャルと、その片側にある有界な波動関数の初期値を構成してみせて、それを証明することは大変難しい（疑問に思う方は実際やってみればわかる）。むろん、トンネル確率は障壁ポテンシャルの断面積に対して指数的に低くなるし、逆にごく小さな障壁では超光速時間は短いので、巨視的に因果が保たれているように見えるが、それは近似に過ぎない。要するに相互作用項を持つ、ほとんどすべての場合で、極めて小さい確率であるにしろ、因果は破れざるをえないのである。

前論文（１）では因果が閉回路をなしているときの事象の生起確率を計算しなかったが、事象が（各分岐世界において）無矛盾であることを仮定すれば、遷移確率の相互積を取ることで比較的簡単に計算できる。

我々は、過去に因果を疑問視するあるいは明確に否定する論考、あるいはそう言いたげな論文や著書を１ダース以上見つけたが、ほとんど無視されていた（註１）。しかし、これらは真剣に再考されるべきである。

2　因果回路による概念的な矛盾

大部分の物理学者は、まるで原始人が平たい世界を信じるように、素朴な常識として因果率を信じている。これはなぜなのだろうか。すぐ分かるのは論理的に奇妙なことが起こることである。

過去の出来事が未来の出来事に影響するのは当たり前だが、その逆の現象、例えばタイムマシンや未来電話があると、未来の出来事が過去の出来事に影響することが起こる。このように因果がループをなし相互に影響する場合を、因果が「閉回路」をなすと呼ぼう。因果が閉回路をなしたとき、具体的にどのようなことが起こるのだろうか。20世紀のＳＦ（文献２に数多く例示されている）から最近のドイッチェらの論考（３，４）に至るまで様々なことが考察されてきた。特に「親殺しのパラドックス」などの論理的な矛盾が有名である。この稿では、このような「矛盾」の言語的で概念的な考察だけでなく、具体的な確率についても考察する。定量的な予言ができてこそ、物理学になるのである。

さて、タイムマシンや未来電話、予知などによって因果が閉回路をなしている時、具体的にどのような「矛盾」が起こるのだろうか。ＳＦ作家のルディ・ラッカー『四次元の冒険』（２）にはタイムマシンのパラドックスの例が多く挙げられているが、やはり最も有名なものは「親殺しのパラドックス」である。それは、タイムマシンに乗って自分の親の子供時代に行き、自分の親を殺すというものだ。もし親殺しが成功すれば、自分は生まれないことになり、タイムマシンに乗って親を殺しに行くことができなくなる。これは矛盾だ。タイムマシンが存在した場合、過去が変わってしまう可能性があるのである。

この矛盾に対する解答の一つは、因果の矛盾が生じそうな場合は、様々な「偶然」が作用して、矛盾が生じることが阻止されると考えるのである。「親殺しのパラドックス」の場合は、親殺しが実際に実行されることが様々な偶然により不思議にも阻止されることになる。その結果、過去を変えようとすることは予定調和的に回避され、過去と未来が矛盾することはなくなる。これはロバート・ハイラインが『夏への扉』などのＳＦで採用しているアイデアである。これを「無矛盾説」と呼ぼう。この場合、過去が変わるという矛盾は回避されることになる。だが、世界に矛盾が生じるのを防ぐ役割をもつ「様々な偶然」は、何ともご都合主義的で由来がはっきりせず、納得できないと考える者もいる。例えばドイチェ（３）などはそう考えている。

もう一つの回答は、量子力学における多世界解釈の多世界性を積極的に援用する説である。親を殺そうとする人物がタイムマシンに乗る一つの世界があり、彼がタイムマシンに乗って現れて彼の親を殺す別の世界が併存すると考えるのだ。つまり、親を殺しに行こうとする人物が実際に行く世界は、正確にはその世界の過去ではなく、並立した世界の過去になる。当然、元の世界の過去では、この狂気の殺人者は現れない。そして、この二つの世界は、その殺人者がタイムマシンに乗って現れるかどうかの時点までは全く同じであり、殺人者が現れる世界と、現れない世界に分裂するのである。これは丁度、量子力学の波束の収束に伴って、世界が分裂すると考える多世界解釈に沿っている。これは正確には「タイムマシン」ではないと言うかもしれないが、それは定義の問題で、とりあえず矛盾は回避されている。このアイデアも様々なＳＦに採用されているのだが、多世界解釈の熱心な宣伝者であるドイッチェは、この解釈を積極的に支持している（３，４）。これを「分岐説」と呼ぼう。

その他にも様々な解釈があるだろうが、十分に論理的なものは、この二つしかないと思う。この二つは概念が違うだけでなく、後に見るように確率の計算も異なるのである。

正式な論文になったアイデアとして、ワームホールを使ったキップソーンらのタイムマシンがある。その存在を仮定してキップソーンらは、ビリーヤードがそれらのタイムマシンを出入りして、自己相互作用をすることを考察している（６）。この状況設定では、ある種の矛盾が起こる場合があり得る。ただ、かれらの考察は粒子であるビリヤードボールは古典的かつ理想的な剛体なのに対して、考え方は量子力学的になっている。エントロピー

を全く無視している点も不満足である。

我々が論文（1）において提出した問題1．Bの実験は、現実の実験（7）を少しだけ拡張したものという意味で現実に実行しうる。しかし、十分簡素化してあるとはいえ、実際に計算するにはかなり複雑で分かりにくい。なぜなら、古典的な部分と量子的な部分が混在しているからである。そこで、より簡単な例から考えてみよう。

（実験1）

物を過去に送れるタイムマシンがあるとする。そこで100円硬貨を1時間前に送ることを考える。だが、そこに条件をつける。1時間前にその硬貨が送られてこなければ送り、送られてくれば送らないということにする。これは完全に因果が矛盾している。これを実験1と呼ぼう。未来電話があるとしても同じことだ。1時間後から現在に電話をかけるとする。今未来からかかってきたら、1時間後は電話しないし、かかってこなければ、1時間後に電話するとするのである。

このような矛盾に対し、「分岐」説のドイチェは多世界解釈によって切り抜けることを主張する。つまり二つ以上の並列世界を考えて、世界1では硬貨が送られてこないので、1時間後に硬貨を過去に送る。世界2では硬貨が送られてきたので、硬貨を送らない。この場合、世界1の硬貨は世界2に行くので、正確にはタイムマシンとは言えないという者もいるだろう。未来電話の場合も同様に考える。電話がかかってこないので、1時間後に電話をかける世界1は、実際には別の世界2にかけるのであり、その世界2ではかかってくるので、1時間後にかけないのである。すると世界が二つあることになるが、個々の世界では矛盾はしない。

ところでこの実験は原則として繰り返すことができる。何度もこの実験を行ったとしよう。そのときコインが送られてくる事象の期待値はどうなるのだろうか。世界が二つあるので確率は半分半分になるというのがありそうな答えだ。実際、後述の古典計算法でもほぼ半々になる。

今度は実験2を考えてみよう。実験1とは反対の条件を付ける。つまり、

（実験2）

硬貨が送られてくれば送り、送られてこなければ送らないという手続きにする。

これは因果が全く矛盾していないから、問題はないように思える。実際、多くのタイムマシンの論考では、これについては「論理の矛盾」が生じないため、考察されていない。だが、具体的に計算の段階にはいると深刻な問題が起こる。実験を繰り返した時の期待値

が、そのままでは計算できないのだ。つまり、因果的な矛盾がないというだけでは、実験２を繰り返したとき、どんな頻度で硬貨が送られてくるか計算できないのである。確率が幾つでも「論理的な矛盾」は生じないからだ。

しかし、実験の失敗、例えば送ろうとしたが何らかのトラブルで送れなかった場合や、送らないつもりが送った場合（これはほとんどありそうもないが）を考慮に入れれば、実は計算が可能になる。さらに重要なことに、分岐説と無矛盾説では、計算結果が劇的に異なる。分岐説ではやはりほぼ半々になるのに対して、無矛盾説では「送ろうと思ったが送れない」確率と「送らないつもりが送る」確率の比率になる。常識的には後者は前者より希だと考えられるので、無矛盾説に立てば、百円玉を送ろうと思ったが信じられないような偶然が数多く生じるため結果的に送れないことが頻発することになる。

未来電話の古典的計算例

以下にもっとも簡単な例について具体的な計算をしてみよう。実はタイムマシンで百円玉を過去に送る例より、未来電話の例の方がわかりやすい。タイムマシンで具体的に物体を送る例も分かりやすい例ではあるが、送られて来た百円玉をそのまま送り返すと、後述のようにエントロピーと矛盾が生じている可能性があって、実は余りいい例ではないのである。代わりに未来電話を考える。

未来電話のもっとも簡単な物は、次のような装置である。右側にスイッチがあり、左側にランプがある。スイッチを入れればランプが点灯する。スイッチを切ればランプが消えるとしよう。普通はスイッチの状態を選んだ後で、ランプにその結果が反映される。これだけなら、ただの電気回路なのだが、量子力学的な工夫をして、ランプが未来のスイッチの状態を偶然以上の確率で反映できるとしよう。たとえば、一日後のスイッチの状態を今見ることができるとしよう。この装置は、１ビットだけしか交信できないが、これを並列化すれば、音声や映像もデジタルで送れることになる。だから「電話」なのである。

この一番簡単な未来電話でも、前のタイムマシンのように論理矛盾を生じさせることができる。例えば、ランプが一日後のスイッチの状態を反映させているとすると、ランプの状態を覚えておいて、丁度、１日後に横のスイッチをそれと矛盾するように、あるいは整合するように押してやることができるはずだ。

この装置の例を使って、古典的な確率の考えに基づいた具体的な計算をしてみよう。ここで、古典的な確率というのは、複素振幅ではなく、古典的な非負値確率のことである。こちらの方が、簡単に考察でき、直感的にも分かりやすい。複素化については、後の別節で説明する。

スイッチを「上に入れる」か「入れない」かを事象１とする。「電灯が灯る」か「灯らない」かを事象２とする。まず、最初に因果に回路を設定しない素朴な状況のことを考える。事象１から２へ遷移と、事象２から１への遷移を独立に考えるのである。後で見るよ

うに設定がうまく働かない場合のほうが重要だから、その確率を変数にとる。スイッチを上の位置にしたとき、一日前にきちんと上の位置にランプが灯る古典確率を$1\text{-}p_1$、なぜか装置がうまく働かず上に灯らない確率p_1としよう。同様にスイッチが下なのに、一日前に上のランプが灯る確率をp_2、電灯が灯らないという設定通りの確率を$1\text{-}p_2$とする。さらに、ランプの点灯を見て、１日後にスイッチを入れる確率を$1\text{-}q_1$、入れない確率をq_1、点灯していないのにスイッチを入れる確率をq_2、入れない確率を$1\text{-}q_2$とする。このランプを見てスイッチを操作するのは、人間である必要は全くなく、自動化された機械でも良い。むしろその方が正確な実験ができるだろう。もう一度述べておくが、このp_i、q_iは因果回路を設定しない場合の確率であり、因果に閉回路を設定してしまうと見かけの確率が影響を受けて変わってしまうことを注意しておく。またp_i、q_iは非常に小さいかもしれないが正の値である。なぜなら、現実に装置が壊れる確率、あるいはそれを操作する人間に間違いや事故が起こる確率は完全な０ではなく、どんなに希にせよ必ず存在する。極端な話をすれば、未来電話や、それを操作している人間を構成している多数の核子が、一日の間に一斉に崩壊して、機械が壊れる、人間が死ぬという確率も完全な０ではないのだ。これより現実的な阻害要因は色々とあるだろう。

存在しうる場合は、ランプが（灯る、灯らない）×　スイッチを（入れる、入れない）の四つになる。ランプが（灯る）状態を（○）、（灯らない）状態を（×）、スイッチを（入れる）状態を（↑）、（入れない）状態を（↓）と略記し、状態（灯る、入れる）を（○↑）、（灯る、入れない）を（○↓）、（灯らない、入れる）を（×↑）、（灯らない、入れない）を（×↓）と書く。ここで、その四つの状態の割合が問題である。

上の確率設定は

（○↑）：（○↓）＝$1\text{-}q_1 : q_1$

（×↑）：（×↓）＝$q_2 : 1\text{-}q_2$

（○↑）：（×↑）＝$1\text{-}p_1 : p_1$

（○↓）：（×↓）＝$p_2 : 1\text{-}p_2$

という割合になる。さらに四つの状態の割合の総和が１という条件が付く。ところが、これは式５つに変数４つの過剰決定系であり、ほとんどの場合、そのままでは解がない。

無矛盾説では様々な偶然が発生して、矛盾が生じることが妨げられるということになる。よって、前に触れたように因果回路を設定した時点でp_i、q_iがその影響を受けて、解が存在するように変更されると考えるしかない。具体的にはより大きなパラメータ空間Ωがあって、その元ωの変数としてp_i、q_iがあると考える。そして、解が存在するp_i、q_iを与えるωのみが選ばれるとするのである。しかしながら、これではp_i、q_iから直接生起確率が計算できない。とはいえ、全く何も予想がつかないわけでもない。p_i、q_iのうち、量子力学的な偶然にもっとも影響されそうな変数が、因果回路の設定によってより大きな影響を受けて変更されると予測される。

因果を保ち単線的な時間発展の記述では、確率行列やユニタリー行列が系の確率的な時間発展を記述するのに有用である。これの類推から、時間に閉回路がある場合においても因果行列の表示が有効であると考えるのは当然である。まず、この方向で古典的な正値確率のモデルを考えてみよう。因果が閉回路をなしている場合、結果が原因にもなるので、その両方の遷移行列を掛け合わせた遷移行列に重要な情報があると考えるべきである。遷移行列では固有ベクトル、固有空間などが重要な意味を持つ場合が多いので、特にそれを考えてみる。

上記の例で言うと、ランプが（灯る、灯らない）事象を入力にして、スイッチを（入れる、入れない）を出力とする因果行列と逆方向の因果行列、

$$\begin{pmatrix}\uparrow\\ \downarrow\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-q_1) & q_2\\ q_1 & (1-q_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\circ\\ \times\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\circ\\ \times\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-p_1) & p_2\\ p_1 & (1-p_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\uparrow\\ \downarrow\end{pmatrix}$$

になる。ランプの点灯状態を基底とした因果行列は

$$\begin{pmatrix}\circ\\ \times\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-p_1) & p_2\\ p_1 & (1-p_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(1-q_1) & q_2\\ q_1 & (1-q_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\circ\\ \times\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(1-p_1)(1-q_1)+p_2q_1 & p_2(1-q_1)+q_2(1-q_2)\\ p_1(1-q_1)+q_1(1-p_1) & p_1q_2+(1-p_2)(1-q_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\circ\\ \times\end{pmatrix}$$

この行列を考察するわけだが、重要なポイントがある。量子力学ではある時点の状態が（たとえシュレディンガーの猫のように宇宙全域で重ね合わせの状態も含めて）基の重ね合わせの状態で記述される。しかし、ある時点では幾つかの状態（あるいは世界）が重なっていても、それがある任意の時点において、ベクトルあるいはもっと広く関数空間の一要素として記述できると考えるのが適当である。よって事象１と事象２の間で因果がループしていても、事象１なり事象２なりの状態の混合を表すベクトルは不変（少なくとも観察可能なベクトルの要素の大きさの比は不変）であると考えざるをえない。これがないと、そもそも世界の状態の記述自体が意味をなさなくなる。よって、因果がループするような遷移行列に対して事象１のベクトルが不変である必要がある。これは固有値１に対応する固有ベクトルを考えることに当たる。都合のいいことに、確率行列ではペロン・フロベニウスの定理から最大固有値１が必ず存在するのである。実のところ、この結果の意味をよく考えてみれば、固有値１に対応する固有ベクトルが解であるというのは、分岐説にあたるのである。

しかし、存在が証明されていたとしても、この行列はパラメータが複雑で、実際の固有ベクトルを考えるのは難しいので、とりあえず（q_1, q_2）をもっと簡素化する。まず、最

初にランプがついたときは、逆にスイッチを下げ、ランプがつかない場合にスイッチを上げるというように、因果が矛盾するような設定を行う。さらに人間の動作は機械の精度にくらべて十分に高いと考えることにする。つまり、$(q_1, q_2)=(1,1)$ である。このとき、因果行列は

$$\begin{pmatrix} \circ \\ \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 & (1-p_2) \\ (1-p_1) & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ \\ \times \end{pmatrix}$$

になるが、これは基底状態を事象 2 のスイッチの上げ下げにした方が簡単になる。
すると因果行列は、

$$\begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & (1-p_2) \\ (1-p_1) & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix}$$

になり、その固有値は 1 、対応する固有ベクトルは $(1\text{-}p_2, 1\text{-}p_1)$ になる。よって、この総和を 1 に規格化した $(1\text{-}p_2, 1\text{-}p_1)/(2\text{-}p_2\text{-}p_1)$ が、スイッチの上げ下げの確率の比となる。ここで重要なのは、この計算では装置がうまく働く確率の比率が、スイッチの上げ下げの確率の比率になることである。この計算では、因果矛盾の状況のため遷移行列の非対角成分が決定的に効いてきている。つまりこれは矛盾する経路が重要だから、分岐説に基づいた計算になる。

純数学的には固有値 1 に対応する固有ベクトルが複数ある場合がある。そしてそのときに、どの固有ベクトルを解としてとるべきかが分からなくなってしまう。(ペロン・フロベニウスの定理から、確率行列では必ず絶対値最大固有値は 1 である)。しかし、パラメータ p_i, q_i に関して固有ベクトルが重複する測度は 0 なので、ほとんどすべての場合で無視できる。

一方、無矛盾説の数理化では全く別の計算になる。現実に矛盾しない解のみが残ると考えるということは、行列の対角成分意外は矛盾する経路だから、すべて矛盾しない事象を表す対角成分のみを考えろということになる。よって、確率比は $p_1:p_2$ になり、確率ベクトルは $(p_1, p_2)/(p_2+p_1)$ になる。矛盾する回路は省くので、その経路の分だけ確率測度が減ることに注意しよう。その分を補うために (p_2+p_1) で割るのである。分岐説と無矛盾説とでは、解のベクトルも変数も反対になっていることに注意する。

とはいえこの無矛盾説に基づく方法は、前記の因果行列の対角成分しか考えず、他の成分を捨てていることになるので、綺麗さが落ちる気がしないでもない。だがこれは、観測による波束の収縮によって相関行列の対角成分だけが残ることに類似している（もしかすると、同じ原理で定式化できるのかもしれない)。この実験では、パラメータ p_1 と p_2 をうまく動かない確率に設定したことに注意すると、無矛盾説では、うまく働かない確率の比が重要になる。

今度は逆に因果が矛盾しない場合を考える。つまり、ランプがついたときはスイッチを

上げ、ランプがつかない場合にスイッチを下げるとする。$(q_1,q_2)=(0,0)$ である。このとき、因果行列の一つは単位行列になるので、どちらを基底にしても同じであり、

$$\begin{pmatrix} (1-p_1) & p_2 \\ p_1 & (1-p_2) \end{pmatrix}$$

の固有値は１、対応する固有ベクトルは (p_2, p_1) になる。よって、この総和を１に規格化した $(p_2, p_1)/(p_2+p_1)$ が、スイッチの上げ下げの確率の比となる。つまり、分岐説では、うまく動かない割合の比率が重要になっている。

一方、無矛盾説では、確率比は $1\text{-}p_1:1\text{-}p_2$ になり、確率ベクトルは

$(1\text{-}p_1, 1\text{-}p_2)/(2\text{-}p_2\text{-}p_1)$ になる。因果の矛盾しない設定とは異なって、装置がうまく動く確率の比になる。

このように二つの説で予測値が異なり、実験ができるならばどちらが正しいかは決定できる。どちらにせよ、因果の回路の設定を極端にすると、機械や人間が設定通りに動かない可能性を考えなければ、完全な矛盾、あるいは逆に不定性が除去できず、計算不能になることに留意しておく。

タイムマシンとエントロピー

さて、タイムマシンでコインを過去に送り返す実験を考えてみよう。ある時刻を決めて、その時刻にタイムマシンで一時間後の未来から百円玉が送られてきたら、その送られてきた百円玉を１時間後に一時間前へ送り返すとする実験である。重要な問題点は、その百円玉の由来である。このとき、この百円玉は、送られてきてから送り返す一時間ばかりの時空間の閉回路の中にしか存在せず、いつ製造されたわけでもなくなる。これだけなら、論理的な矛盾はないが、実はもっと重大な難点がある。送られてきたコインを操作しようとすると、例えばコインを触ることによって表面原子がはがれ落ち、手垢が付くはずだ。しかし、コインの世界線は閉回路になっているので、なぜか、そのような変化は起こり得ない。あるは総合的にキャンセルされる。これは実に奇妙だ。これにはタイムマシンとエントロピーについての矛盾が典型的に現れている。コインでは、これがはっきり分からないのなら、動物のマウスに変えてみればいい。このマウスは年をとることができるのだろうか。こう考えてくると、巨視的なレベルでのタイムマシンが、少なくとも無矛盾説では如何にありそうもないか分かる。

もっと注意深く考えてみよう。もしエントロピーは時間と共に増大すべきであるという熱統計力学の基本原理がタイムマシンにも適応されるとすると、この矛盾はタイムマシンが消費すべきエントロピー（事実上のエネルギー）の下限にヒントを与えていることになる。

過去に送る番号札の思考実験

さらに少し別の例で、分岐説と無矛盾説の違いを見てみよう。

やはり、ある時刻を決めて、その時刻に一時間後の未来から数字を書いた紙が送られてくるとする。もし送られてこなかったら、１時間後に「１」と書いた紙を、その一時間前へ送り返すとしよう。もし、「１」と書いた紙が送られてきたら、１時間後に「２」と書いた紙をその一時間前へ送り返す。つまり、「n」と書いた紙が送られてきたなら、「$n+1$」と書いて送り返すように実験を設定するのである。タイムマシンではなく、未来電話で過去に情報だけを送るとしても良い。

この場合、分岐説では加算無限の並行世界に分岐するのだが、送られてきた紙の番号を見て、現在自分のいる分岐世界の順番が分かることになる。つまり、何も送られてこなかった世界を０番目とすれば、送られてきた番号が、その世界の分岐番号なのだ。（このやり方は、場の量子論の生成演算子に似ている。）さて、この実験を数多く行うとして、n 番目の数が送られてくる、あるいは何も送られてこない確率を、分岐説に基づいて考えてみよう。番号を間違えるという初歩的なミスが無視できるのに対し、機械のトラブルでうまく過去に紙を遅れなくなる確率が圧倒的に大きくて重要であり、その確率はｎにかかわらず大体 q としよう。すると n と書いた紙が送られてくる確率は、ほぼ $(1-q)q^n$ になる。

一方、無矛盾説では様々な部分が異なる。無矛盾説では、例えば「１」と書いた紙を受け取ったとして、「２」と書いて過去に送り返すことは矛盾だから起こり得ないのだ。この場合、矛盾しない事象の系列は、例えば「１」と書いた紙を受け取ったとして、「２」と書くべきところの数字を、なぜか間違えて「１」と書いて送ったり、何も送られてこなかったから、一時間後に「１」と書いて送るべきだが、何らかのトラブルで過去に送れない事が起こったりしたするしかない。「n」が送られてきて、間違えて「n」と送り返す確率を q_n、何らかのトラブルで過去に遅れない場合の確率を q_0 とすれば、各事象の生起確率は、その割合で均分した値になる。

古典因果の計算

このやりかたを厳密に定式化しよう。

「原因となる」過去の事象を A_i（$i=1,2,...$）、その確率を a_i、それを縦に並べたベクトルを $\mathbf{a}$ としよう。同様に「結果となる」未来の事象を B_j（$j=1,2,...$）、その確率を b_j、それを縦に並べたベクトルを $\mathbf{b}$ としよう。さらに事象 A_i、B_j は排反かつ網羅的だとしよう。当然、$\Sigma_i a_i=1, \Sigma_j b_j=1$ が成立する。

アインシュタイン因果率が成立する状況、つまり未来の事象 B_j が過去の事象 A_i に影響を与えず、過去の事象 A_i から未来の事象 B_j にのみ影響を与える状況のときの相関行列を $\mathbf{S}=(s_{ji})$ とする。この時、$b_j=\Sigma_i s_{ji} a_i$（$\mathbf{b}=\mathbf{Sa}$）である。また $\mathbf{S}$ のすべての要素は非負値で、列の要素の総和が１、つまり $\Sigma_j s_{ji}=1$ が成立する。これは、過去のどの事象 A_i において

も、未来の事象の確率の総和が１であるという当然のことを意味している。この条件を満たす行列を古典確率行列と呼ぼう。確率行列はベクトルの要素の総和を保存するという性質を持つ。よって、確率行列と確率行列の積は確率行列になる。

逆に過去の事象 A_i は未来の事象 B_j に影響を与えない状況で、未来の事象 B_j から過去の事象 A_i に影響を与える状況が設定されたときの相関行列を $T=(t_{ij})$ とする。同様に、$a_i=\Sigma_j t_{ij} b_j$（$\mathbf{a}=\mathbf{Tb}$）であり、やはり $\Sigma_i t_{ij}=1$ が成立する。

さて、両方の相関が設定された状況では、どうなるかを考えてみよう。世界は一つなので、その確率も決まっていると考えなければならない。すると、

$$\mathbf{a}=\mathbf{TSa} \quad \text{かつ} \quad \mathbf{b}=\mathbf{STb} \tag{1.1}$$

が成り立つと考えられる。行列 **TS** も **ST** も正方な確率行列であり、すべての要素が非負値だから、ペロン・フロベニウスの定理より、非負絶対値最大固有値が存在する。ここで **TS** も **ST** も確率行列であり、要素の総和を保存することに注目すれば、その絶対値最大固有値は１でしかありえない（他の固有値と固有ベクトルは必ず虚数成分を含む）（８）。やはり、ペロン・フロベニウスの定理からその時の固有ベクトルは実数成分のみのものが取れる。つまり、式（1.1）には必ず非自明な解が存在するのである。分岐説によれば、その中で、総和が１の解が答えである。前に述べたように、確率行列全体の中で固有値１に対応する空間が複数存在する測度は０であるから、ほとんどすべての場合で、それは一つしかない。

だが、その解はヒルベルト空間の一部に過ぎないという意味で、当然、実験者が自由に決められず、制限されたものになる。これはいったい何を意味しているのだろうか。私は一つの解釈として、因果が閉回路をなしている場合は、過去や未来がその閉回路によって制約を受けてしまうということを提案したい。いくら量子力学的な不確定性が存在したとしても、閉回路が存在する事によって、その閉回路と接続可能な過去や未来の幅が狭められるのである（拘束された過去と未来）。前の例で言えば、信号の内容やコインが送られてくる確率は実験者が決められず、あらかじめ拘束されているという意味である。

無矛盾説の場合は前の例の計算結果のように、やり方が異なる。**TS** のトレースを考えて、その比率に対応すると考えるのである。

これらの方法は簡便ではあるが万能ではない。むしろ、因果の回路の成立によって、因果相関行列がほとんど変化しないという状況においてのみ近似的に成立する計算式である。複雑な因果の回路においては、個々の独立した状況での因果相関行列事体が、回路のトポロジーの影響を受けて変化する可能性がある。

3　量子化

今までの考察は非負値実数をとる古典的な確率の話であった。しかし量子力学は複素振幅で記述されている。そこで、これを量子化することを考えよう。因果の回路が存在する場合、もしかすると既存の量子力学の枠に入らない可能性があるのだが、とりあえず考えてみよう。

分岐説での計算

実のところ、前の章で分岐説に基づく古典因果の計算とまったく同様に計算しようとすると、すぐに様々な困難が生じる。量子力学の確率振幅は複素値のヒルベルトノルム L_2 であり、古典的な非負値確率 L_1 ではない。そのうえ、古典法と異なって、非負行列の定理がそのままでは使えず、複素行列の特異性が出てくる。

排反かつ網羅的な事象 A_i, B_j（$i, j=1, 2, ...$）について、その複素振幅を a_i, b_j、それを縦に並べたベクトルを $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ としよう。量子力学の状態空間を正確に記述するには最初の状態の全空間と最後の状態の全空間が等しくなければならない。よって A_i のなす空間と B_j のなす空間が等しい必要がある。とりわけ事象の数が等しい必要がある。そうでないとユニタリー行列が構成できない。古典確率では重要ではないが、複素確率ではある事象 A_i が、実はより細かい排反事象の張る空間で構成されている可能性を常に考えておく必要がある。A_i のなす空間と B_j のなす空間が等しくないときは、A_i のなす空間と B_j のなす空間の併合を考える必要がある。これは複雑なことだが、とりわけ因果回路を設定しないとき、それぞれに独立と見なせる場合はテンソル積 $A_i \otimes B_j$ のなす空間を考えればよい。

前と同じように、事象 A_i から事象 B_j への影響行列を $\mathbf{S}=(s_{ji})$、逆に事象 B_j から事象 A_i への影響行列を $\mathbf{T}=(t_{ij})$ とする。この時、$b_j=\Sigma_i s_{ji} a_i$（$\mathbf{b}=\mathbf{Sa}$）、$a_i=\Sigma_j t_{ij} b_j$（$\mathbf{a}=\mathbf{Tb}$）であり、$\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ はユニタリー行列である。ユニタリー行列は群をなすので、積行列 $\mathbf{TS}$ と $\mathbf{ST}$ もユニタリー行列である。

古典確率の場合と同じように考えるとすると、両方の影響が設定された状況では、やはり

$$\lambda\,\mathbf{a}=\mathbf{TSa} \text{ かつ } \lambda\,\mathbf{b}=\mathbf{STb} \tag{2.1}$$

が成り立つはずである。特に古典確率では固有値が 1 に取れる。しかし、ユニタリー行列は非負行列と異なり、固有値 1 が存在するとは限らない。そこで複素角の位相は区別できないとして、絶対値が 1 のすべての固有値を取るとすると、そもそもユニタリー行列のすべての固有値の絶対値は1になるので、どの固有値と固有ベクトルを採用すべきか決まらなくなってしまう。このように分岐説は複素化しづらい。ともあれ、現実に存在しうる状態が、ある固有値とそれに対応する固有ベクトルに限られるとすると、ほとんどの場合、

状態を表すベクトル **a**, **b** が限定されるという意味で、やはり拘束が起こるのである。

無矛盾説の量子化

前節は分岐説の量子化であった。しかし今度は無矛盾説を量子化してみよう。これはかなり簡単である。

前と同様に因果回路を特別に設定しないとき、独立と見なせる事象 A_i, B_j について考える。無矛盾説では、もともと独立であった事象 A_i, B_j が、因果回路を設定した影響を受けることにより、矛盾した回路の振幅が消失するという解釈になる。$A_i \otimes B_j$ の複素振幅を考えよう。これは事象（A_i, B_j）の組に対応する。矛盾のない経路を考えるのだから、A_i から B_j への伝播振幅が s_{ji} であり（遷移確率は $|s_{ji}|^2$）、B_j から A_i への伝播振幅は t_{ij} であり、独立の仮定があるのだから、$A_i \otimes B_j$ の複素振幅は $s_{ji}t_{ij}$ であり、確率はその絶対値の二乗に比例すると考えるべきである。なぜなら、我々は因果の一方向の制限つきの確率振幅のみ知っているからである。よって振幅は、$s_{ji}t_{ij}$ 以外には考えられないのである。つまり、以下のような関係になる。

$$\sum_j |t_{ij}|^2 = 1, \qquad \sum_i |s_{ji}|^2 = 1$$

で、

$$\sum_{ij} |s_{ji}t_{ij}|^2 = Z^2$$

とおくと、事象（A_i, B_j）の組が起こる振幅は、

$$s_{ji}t_{ij}/Z$$

なのである。これは実質的に無矛盾説の通常の確率での計算と全く一致しており、極めて自然な量子化である。事実、先の未来電話の例で計算しても、予測値は全く一致する。だが、あくまでこれは両方ともの測定を行った場合である。どちらかの測定を行わなければ、自分から自分への経路の総和になるに過ぎない。

さらにこれは、添え字 i, j に関して各ヒルベルト空間を生成空間とするテンソルになっており、基底の取り方に依存しない。

実験1.B の計算

最後に無矛盾説に基づいて、（１）の実験1.Bの計算をしてみよう。これは、粒子の経路を測定しない場合はスクリーンに干渉縞が生じるのに対して、経路を測定した場合、干渉縞が消える通常の実験（７）を基にしている。

これに加えて、スクリーンのどこに粒子が当ったかの観測（これを観測Ａと呼ぼう）を考える。経路測定をしなかったときに、干渉縞の生じる領域の一部に測定器を置き、その結果（観測Ｂ）によって観測するかどうかを変えるという、因果率に循環回路（ループ）が生じさせる実験である。因果回路の設定は、もっとも簡単なケースを仮定する。つまり観測Ｂにおいて観測器に粒子が反応した場合は経路測定Ａをして、反応しなかった場合は

経路測定をしないとしよう。この観測Ｂは必ず行われるが、観測Ａは行わない状態もありうるのである。

具体的な計算をしてみよう。因果回路を設定する前では、ある粒子の経路について経路測定をしたときに観測Ｂにおいて観測器に粒子が入る古典確率を p、経路測定しないときの観測Ｂにおいて観測器に粒子が入らない古典確率を q、経路測定をした場合は確率 r で「右」、$1\text{-}r$ で「左」とする。（経路は「右」か「左」のどちらかである。）

存在する場合は、（反応する、右）、（反応する、左）、（反応しない、測定しない）の三種類しかない。古典比率は pr, $p(1\text{-}r)$, q になる。確率はこれを全体の総和 $p+q$ で割った値になる。

予知の実現の違い

分岐説と無矛盾説では、予知の実現に関しても異なった予測をする。仮にこれから起こることについて知らせる未来からの信号があったとしよう。無矛盾説では、その信号が正確ならば原則として避けようのない未来である。どんな信号を受けるか、あるいは受けるか受けないかの時点で世界分岐が起こっており、情報が無矛盾で正確ならば世界分岐が起こった後の未来は変えようがない。どうあがいても、予定調和的な偶然のお陰で、その情報のとおりの未来になる。無矛盾説では「予知」は、その分岐世界の未来の情報そのものなので、サイコロの目だろうと、歴史的大事件だろうと、天気だろうと、原則として「予知」は可能である。

それに対して、分岐説ではそれは別の分岐世界の未来から来た信号である可能性があるので、信号が正確でも、それを受け取った人間が実際に体験する未来とは限らないのである。とりわけ、それを避けるように行動した場合、それを取り繕うような偶然は起こらず、世界が分岐して、別の未来が実現する。よって、伝達される情報が正確でも、その予知どおりの未来にはなるとは限らない。つまり、分岐説では「予知」は予測の正確なものに過ぎず、未来からの影響のおかげで世界が異なる方向に分岐する可能性のため、サイコロやルーレットの目、さらには十年後の正確な天気のような、きわめて小さい偶然が決定的に重要な影響を及ぼす場合は、原則として「予知」できないのである。

さらに重要なのは、予知が世界分岐の頻度に及ぼす影響である。分岐説では、先に上げた様々な思考実験（とりわけ番号札の思考実験）でも分かるように、世界がより様々な方向に分岐するように働きがちである。多少の拘束があっても、世界分岐を制約する作用はそれほど強くはない。一方、無矛盾説では、正確な予知の情報を受けた場合、その実現を阻止する事象の生起が打ち消されて、その予知が実現するように進む。つまり、予知を受けてからそれが実現するまでの間、その予知の実現を阻むような事象が生起する世界への分岐が本質的に制約されるのである。エヴェレットの多世界解釈では、どの瞬間にでも世界はインフレ的に分岐していることを主張するが、無矛盾説が正しいとすれば、予知の存

在自体が、世界分岐を劇的に制限することになる。

未来電話や予知のコスト

ところで未来電話や予知にコスト、とりわけエントロピー的なコスト、あるいは経済的なコストがかかった場合、それを誰が払うのかは、一つの重要な問題点である。未来の人と過去の人が話しをする場合、その費用をより積極的に負担しようとするのはどちらだろうか。

未来の人にとっては、過去は変えられないのだから、そのコストは払うだけ無駄である。よって、過去の人にインタビューしようとするような例外的な場合を除けば、原則として過去の人が未来の人に「情報料」という形で払うことになる。これは未来の人と過去の人が同一人物なら問題が起きないように思えるが、それでも若干の問題が起こる。未来の人にとって、やはり過去は変えられないので、わざわざコストをかけて過去の自分に未来を教えてやる必要性はない。このような点からも、やはり過去の自分の方が圧倒的に多くのコストを負担すべきであることが分かる。

4　まとめ

今まで因果率が回路をなす場合に様々に論じてきたが、このように簡単な場合には、比較的に簡単に計算でき、多世界解釈に基づけば、何の矛盾もでないのである。それに対して、アインシュタイン因果律は余分な公理であり、特殊相対性理論と非自明な相互作用とは共存できないと推測する（１の実験1.A)。また、量子力学とも齟齬する可能性がある（１の実験1.B）

しかし、分岐説と無矛盾説では予測値の確率に違いが存在する。そして何よりも、量子化の問題も考えてみれば、無矛盾説のほう可能性があると我々は考えている。そもそも、分岐説は全体的な空間のトポロジーがユークリッド空間ではないようなものになり、ワームホールのようなものを仮定しているのである。そのようなものが存在しない平板な空間では因果の確率が計算しづらい。

無矛盾説では、奇妙な偶然が頻発して未来の変更を阻害するという顕著な特徴があるが、分岐説ではそのようなことは存在しない。言い換えれば、無矛盾説では予知が存在するのに対し、分岐説では予測しか存在しない。とりわけ、無矛盾説では因果回路があれば、きわめて強く未来が拘束されるので、野放図な世界分岐が起こらなくなるという顕著な特徴がある。

この項で計算して見せたのは一番単純な因果率の回路である。より複雑な回路をなす場合も考察の対象となりうるが、因果率が破れていることが、広く受け入れられていない以

上、現段階で論じてもあまり意味が無いだろう。ここで示した計算は簡素化された近似であり、厳密に考えると状態のユニタリー発展が破れている可能性もある。なぜなら、ユニタリー性は時間と関係しているからである。

それはともかく、因果率が閉回路をなしていたとしても、本質的な矛盾は無く、確率も計算可能なのである。

（註１）この一つに、佐多（９）がある。佐多はKwiatら（1991）の実験（７）の結果を、我々が論文（１）の実験１．Ｂで論じたこととほぼ同じように論考して、未来からの通信が可能であることを主張した。だが、（９）はパリティ誌への一般投稿であり、これには編集委員の否定的なコメントがついている。（ある意味当然だろう。）しかし、これは「常識的にありえない」という反論を超えないコメントに加えて、前述の実験では成り立たない的外れの論考の複合である。彼はこの「発見」を重視し、未来からの通信に関する特許も出している【特許公開平６－268587】。しかし、あまりに先進的な内容のためなのか、ばかばかしいと考えられたのか（多分こちらが正しいだろうが）特許庁からあえなく拒絶されている。私はインターネットなどで調べたが、彼が何者か分からなかった。

（註２）『数理科学』2001年４月号に、伊藤恵一博士による半ば自虐的な解説「構成的場の理論の軌跡と展望」pp.49-57.がある。

（註３）江沢洋、新井朝雄（1988）「場の量子論と統計力学」日本評論社．本書には４次元の場の理論の困難さが詳しく解説してある。

参　考　文　献

（１）蔵琢也　蔵研也、2002、「物理学の幾つかの問題について」、Review of Economics and Information Studies. Vol.2, No.1-4, pp.470-511.

（２）ルディ・ラッカー著；竹沢攻一訳、1989、『四次元の冒険：幾何学・宇宙・想像力』、工作舎.

（３）デイヴィッド・ドイッチュ著；林一訳、1999、『世界の究極理論は存在するか：多宇宙理論から見た生命、進化、時間』、朝日新聞社.
（David Deutsch, 1997, "The fabric of reality:the science of parallel universes-- and its implications", New York:Allen Lane.）

（４）D. ドイッチ、M. ロックウッド、1994、「タイムマシンの量子物理学」、日経サイエンス、Vol.24、No.5、pp.64-71.

（５）ジョナサン・サイモン、1995、「タイムトラベルの物理」、パリティ、Vol. 10、No.8、pp.4-12.

（６）キップ・S・ソーン著；林一　塚原周信　訳、1997、『ブラックホールと時空の歪み?－アインシュタインのとんでもない遺産』、白揚社.

（７）Kwiat, P. G., A. M. Steinberg and R. Y. Chiao, 1991, "Observation of a "quantum eraser" : A revival of coherence in a two-photon interference experiment", *Physical Review A*, Vol. 45, pp. 7729-7739.

（８）Seneta, E., 1981, "Non-negative matrices and Markov chains, 2nd edn". Springer-Verlag, New York.

（９）佐多泰志、1993、「量子実験と時間」、パリティ、Vol.8、No.7、pp.56-59.