ファジー時系列解析の新手法と理論的考察

勝　木　太　一

概　要

本研究は、時系列解析にファジー回帰分析の適用を試みようというものであるが、本文において指摘したように、これまでのファジー回帰分析の方法は、その推定パラメータをファジー変数として構築されているために、時系列解析の重要な「定常性」の問題をクリアし難いという問題があり、そのまま、これを踏襲することに多くの問題点が見られた。

このため、時系列解析に適した回帰分析の手法の開発が求められるところであるが、その新手法が時系列解析に適用しても妥当性のあるものであるか、また、理論的に整合性を有するものであるかを考察しなければならない。

ここでは、このような点を中心に、新しいファジー回帰分析の手法を提案するとともに、論究して行くことにする。

1．はじめに

最近のファジー理論の長足の進歩によって、ファジーモデルの研究の成果は数学的理論および応用の両面に渡って、「多変量解析」に劣らないほど精緻なものとなっている。

特に、「ファジー測度論」「ファジー関係論」といった「ファジー数学の基礎理論」に立脚したファジーモデルの手法は、「ファジー回帰分析モデル」「ファジー統計的決定論」「ファジー数量化理論」「ファジー数理計画論」など、その応用分野のほぼ全領域をフォローすることができるものとなっている。周知のようにその研究事例は、「制御」「行動分析」「データベース」「エキスパートシステム」や「意思決定支援システム」等にわたって非常に優れた成果を示している。

しかし、時系列解析へのファジー研究の適用の事例は甚だ少なく、また、今日の段階ではあまり注目されているとは言いがたい状況である。

しかし、この分野へのファジーモデルの活用の可能性は、前記のファジー研究の急速な進展を考えたとき、非常に大きなものであることが理解できるはずである。本研究は、このような視点から、「ファジー理論」が時系列解析、特に経済事象の時系列解析に活用できる方向を探ることを目的として、それに適した「ファジーの分析手法」の開発と理論的考察を行うものであるが、ここでは、特に、「時系列解析」の手法の開発とその理論的考察を行うことにする。

2．確率的時系列解析モデルの概説

経済現象を対象とした時系列解析モデルとして、前期以前の従属変数を説明変数とする「自己回帰モデル」が利用されることが非常に多い。これは、経済行動が前期の経済行動の動向に大きく影響されるケースが多いからであるが、これは単純化して、以下のような関数と考えることができる。

$$Y_t = a + \Sigma b_i Y_{t-i} + u_t \qquad -(1)$$

上式のような形式のモデルによって、関数を推定するメリットは、データの系列が１系列（すなわち従属変数の系列）のみですむということであり、経済現象の予測などに活用することを考えた場合、計量経済学で活用されるようなマクロ計量経済モデルに比べて極めて簡潔であると言うことであろう。しかし、そのためには厳密な統計理論的裏付けが無くてはならない。

例えば、ある経済変数の時系列データの変動が確率的な変動に基づいているとしよう。そのようなとき、この変数は「確率過程」に従う確率変数であると考えられ、そのデータの系列の動向を確率的な現象と考えるわけである。

「自己回帰モデル」は、このような「確率過程」を「自律的」な運動法則として理解しようというものである。

したがって、「自己回帰モデル」は「定常性」をアプリオリに前提したものとなっているということができる。この「定常性」とは、平均と自己共分散が時間に依存しない（なお、歴史的時間でなく時間差に依存していてもよい）定数であることをいう。

このような「確率過程」の性質を利用したモデルは、「自己回帰モデル」を含めて「時系列解析モデル」と呼ばれるが、このようなモデルは、一般的に経済の計量モデル分析に使用される「計量経済モデル」と大きく性質を異にしている。

「計量経済モデル」の場合は、経済理論などを根拠にした経済構造にもとづいて「関数」を特定するものであるが、それに対して、「時系列解析モデル」は経済構造を一種のブラック・ボックスとして捉え、「確率過程」を利用してある程度の精度の予測値を得るという点に重点が置かれている。すなわち、経済変動などの現象を、因果関係を確率的なものと写像してその変動自体を予測するというものである。

以下、このような「時系列解析モデル」について簡単に説明するとともに、その吟味を行うことにしよう[1)]。

1）「時系列解析モデル」には、ここにあげた「AR モデル」、「MA モデル」、「ARMA モデル」のほかに「ARIMA モデル」「ARITA モデル」など多くのものがあるが、本論の性格上、これらについてはとりあげないことにする。

(1)式のような「自己回帰モデル」(Auto-Regressive Model・AR モデル)は、前述の意味で定常性を満たさなくてはならないことから、推定においては、「時系列データ」を機械的に当てはめるだけでは満足な結果を得られるとはかぎらない。

たとえば、その時系列データにトレンドがみられるような場合では(経済データの多くが周知のように上向きのトレンドを有しているケースが多い)、当然、定常性は得られない。このような場合、変数の階差などをとるなどして、定常性を満たすデータに変換することが求められる。すなわち、少なくとも形の上で「定常性」を満たすようなデータに変換し、モデルのあてはめを行う必要があるのである。

さて、モデルが p 期さかのぼった変数の自己回帰モデルとするとき、次数 p の自己回帰モデルといい、AR(p)と表記するが、この AR(p)は、

$$Y_t = a + b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} + \cdot\cdot\cdot + b_p Y_{t-p} + U_t \qquad -(2)$$

という形のものとなる。もし、ここで「定常性」が満たされているならば、平均(μ)は時間に関して一定であることから、

$$\mu = a + b_0 \mu + b_1 \mu + b_2 \mu + \cdot\cdot\cdot + b_p \mu \qquad -(3)$$

または、

$$\mu = \frac{a}{1 - b_0 - b_1 - b_2 - \cdot\cdot\cdot - b_p} \qquad -(4)$$

と表記される。

さらに、

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdot\cdot\cdot + b_p < 1 \qquad -(5)$$

である。

一方、自己共分散は

$$\gamma_k = E\left[Y_{t-k}\left(b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} + \cdot\cdot\cdot + b_p Y_{t-p} + u_t\right)\right] \qquad -(6)$$

によって決定されるものとなる。

この式から、「定常性」の仮定をおき、平均を 0 とした過程を基準とし
$a=0$ としたとき、平均のまわりの分散 γ_0 は、

$$\gamma_0 = \Sigma b_i \gamma_i + \sigma^2$$

となる。

以下同様にして、k＝1，2，・・・，p とすると、

$$\gamma_1=b_1\gamma_0+b_2\gamma_1+\cdots+b_p\gamma_{p-1}$$
$$\gamma_2=b_1\gamma_1+b_2\gamma_0+\cdots+b_p\gamma_{p-2} \qquad -(7)$$
$$\gamma_3=b_1\gamma_2+b_2\gamma_1+\cdots+b_p\gamma_{p-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma_p=b_1\gamma_{p-1}+b_2\gamma_{p-2}+\cdots+b_p\gamma_{k-p}$$

k が p より大きな場合は、

$$\gamma_k=b_1\gamma_{k-1}+b_2\gamma_{k-2}+\cdots+b_p\gamma_{k-p}$$

が得られる。この自己共分散の各式を γ_0 で割ると、以下の自己相関関数の各式が導出できる。

$$\rho_1=b_1\rho_0+b_2\rho_1+\cdots+b_p\rho_{p-1}$$
$$\rho_2=b_1\rho_1+b_2\rho_0+\cdots+b_p\rho_{p-2} \qquad -(8)$$
$$\rho_3=b_1\rho_2+b_2\rho_1+\cdots+b_p\rho_{p-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho_p=b_1\rho_{p-1}+b_2\rho_{p-2}+\cdots+b_p\rho_0$$

この式が「ユール・ウォーカー方程式」と呼ばれるもので、もし ρ_i が既知であれば、これらの式から b_i の値を得ることができるものである。

このようにして自己回帰モデル等の時系列解析モデルでは、「回帰分析」によらなくとも「パラメータ」の推定値を算定することができる(もちろん自己回帰については最小 2 乗推定法などの回帰分析を使用することができる)。

また、よく知られている時系列解析モデルに、p 期前からの確率的誤差項の加重平均によって Y が決定されているという考え方にもとづく以下の式のように表されるものがある。

$$Y_t=a+u_t-\theta_1u_{t-1}-\theta_2u_{t-2}-\cdots-\theta_pu_{t-p} \qquad -(9)$$

なお、このパラメータ θ_i のついた誤差項(u)の時系列を「移動平均過程」といい、「移動平均モデル」(Moving Average model・MA モデル) と呼ばれるものである。

この MA モデルは以下のような性格を持つものである。

まず、1 階の MA モデル「MA(1)」が、$y_t=Y_t-a$ とした場合、

$$y_t=u_t-\theta_1u_{t-1} \qquad -(10)$$

と表されるとしよう。

これから、

$$u_t = y_t + \theta_1 u_{t-1} \qquad -(11)$$

と変形できるが、これより

$$u_{t-1} = y_{t-1} + \theta_1 u_{t-2} \qquad -(12)$$

を得る。この(11)式を(9)式に代入すると、

$$y_t = -\theta_1 y_{t-1} - \theta_1{}^2 u_{t-2} + u_t \qquad -(13)$$

となる。同様にこのような操作を u_{t-2}，u_{t-3}，・・・について繰り返しゆくと、

$$y_t = -\theta_1 y_{t-1} - \theta_1{}^2 y_{t-2} - \theta_1{}^3 y_{t-3} - \cdots + u_t \qquad -(14)$$

となる。すなわち、このように MA(1)過程は、「AR モデル」（AR(∞)）の反転形式であるということができるものである。

また、以下のような形のモデルも時系列解析モデルの代表的なものである。

$$\begin{aligned} Y_t = \alpha &+ \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \cdots + \beta_p Y_{t-p} \\ &+ u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \cdots - \theta_q u_{t-q} \end{aligned} \qquad -(15)$$

上式は、p 次の AR モデル（AR(p)）と q 次の MA モデル（MA(q)）の組み合わせとなっており、このようなモデルを ARMA(p, q)と表記する。

この ARMA(p, q)過程が定常的であるためには、AR(p)と同様に、

$$\mu = \alpha + \beta_0 \mu + \beta_1 \mu + \beta_2 \mu + \cdots + \beta_p \mu \qquad -(3)$$

または、

$$\mu = \frac{a}{1 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 - \cdots - \beta_p} \qquad -(4)$$

でなければならず、また、

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_p < 1 \qquad -(5)$$

という時系列解析の特質を前提にしたモデルであるということができる。

さて、このような ARMA モデルのパラメータの推定方法であるが、まず、第 1 段階として、AR モデルの回帰係数 β_i をユール・ウォーカー方程式によって求めて、これをもとにして MA モデル部分のパラメータ θ_i を求めるという方法をとる。

すなわち、(15)式を、

$$Y_t+\Sigma\beta_1 Y_{t-i}=\Sigma\theta_1 u_{t-i}$$

として、これから、

$$z_t=Y_t+\Sigma\beta_i Y_{t-i} \quad (j=1,\ 2,\ \cdot\cdot\cdot,\ k) \qquad -(16)$$
$$z_t=\Sigma\theta_j u_{t-j} \quad (j=1,\ 2,\ \cdot\cdot\cdot,\ 1) \qquad -(17)$$

というように置き換える。

(16)式の β_i は AR モデルのところで述べたような形式で、ユール・ウォーカー方程式によって得られる。したがって、z_t の値は決定されるので、(17)式によって θ_i を決定することができるようになる。

いま、

$$E\left(u_{t-i},\ u_{t-j}\right)=1\ ;(i=j\text{ のとき})$$
$$E\left(u_{t-i},\ u_{t-j}\right)=0\ ;(i\neq j\text{ のとき})$$

を前提して、ϕ_i を z_t の相関係数とすると、

$$\phi_{i-j}=E\left(z_{t-i}z_{t-j}\right)$$
$$=E\left(\Sigma\Sigma\beta_i\beta_j Y_{t-i}Y_{t-j}\right)$$

とでき、これにもとづいて(17)式に $z_1,\ z_2,\ z_3,\ \cdot\cdot\cdot,\ z_{t-j}$ を順次乗じて、期待値をとると

$$\begin{aligned}
&\phi_0=1+\theta_1^{\ 2}+\theta_2^{\ 2}+\cdot\cdot\cdot+\theta_\ell^{\ 2}\\
&\phi_1=\theta_1+\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_3+\cdot\cdot\cdot+\theta_{\ell-1}\theta_\ell\\
&\phi_2=\theta_2+\theta_1\theta_3+\theta_2\theta_4+\cdot\cdot\cdot+\theta_{\ell-2}\theta_\ell\\
&\qquad\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \qquad\qquad -(18)\\
&\phi_j=\theta_j+\theta_i\theta_j+\theta_2\theta_{j+2}+\cdot\cdot\cdot+\theta_{\ell-j}\theta_\ell\\
&\qquad\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\
&\phi_\ell=\theta_\ell
\end{aligned}$$

を得ることができる。この連立方程式(18)式から θ_j の値を求めることができるのである。

この他に、「ARIMA モデル」(Autoregressive integrated moving average model)といって、「ARMA モデル」の時系列データ Y_t の階差をとった系列にもとづいてモデルも利用されることが多い。なお、このモデルの時系列過程を ARIMA(p, d, q)と表記する（p；AR 過程の次数、d：階差次数、q；MA 過程の次数)。

また、このような時系列解析モデルについて、モデルの次数をどのように決定するかが

大きな問題である。この次数の同定は、「ボックス・ジェンキンス法」により行われたり、また、以下の式の「情報量規準」AIC（akaike's infomation criterion）によって行われることが多い。

$$AIC = -2\log\left\{\max\left(m_i\right)\right\} + 2\cdot n \qquad -(19)$$

＜m_i；尤度関数の値，n；パラメータの数＞

この AIC の場合、推定したモデルについて、(19)式が最小のものを選ぶべきであるとされている。

3．これまでのファジー回帰分析モデル

a；ファジー回帰分析の概略

一般的な計量分析の手法では、今まで、確率モデルによる分析を行うのが一般的であった。

この場合、上述したように説明変数のベクトルを

$$x_i = \left(x_{i1}, \cdot\cdot\cdot\cdot, x_{in}\right) \qquad -(20)$$

とすると、

$$y_i = \Sigma a_j x_{ij} + u_i \qquad -(21)$$

$$(i = 1, \cdot\cdot\cdot\cdot, n)$$

として、a_j を推定し、x_{ij} で説明できる y_i の推定値と現実値（実績値）の誤差 u_i が確率過程に基づいているという仮定を行うのである。

このようなモデルでは、当然、誤差 u_i を最小とする（最小二乗法では Σu_i^2 を最小とする）a を決定することが問題であり、その確率過程に現実値 y_i がゆらいでいる点を写像してしまっているのである。

このような回帰分析などにおけるパラメータは、いわば、被説明変数にとって、説明変数のウェイトを示すものである。したがって、説明変数の影響の相対的な大きさを示すものということができるが、ミクロベースの場合、観測期間をつうじてこれが一定であるという仮説をおくことは非常に大胆なことといわざるをえない。

すなわち、このようなモデルによってある人間および社会の行動を説明しようとする場合、

$$y = f(x, z) \qquad -(22)$$

という関数にもとづいて、次のように考えることができる。

たとえば、ある経済現象を y_i とする場合、観測期間をつうじていろいろな x_i および z_i に対して同じ反応を持続させるということを意味しており、したがって、x，z の変化がみられないならば、現象の変化もみられないということである。もちろん、このような状況は考えがたいものであり、また、確率モデルでは一定の x，z への反応からはずれた「誤差」は確率的なものであるが、多くの場合モデルの外からのノイズをも含むものであると解されている。

しかし、人間の行動などを説明する場合、これをノイズと解するよりは、むしろ、システム自体のゆらぎと解し、それを説明できるモデルとする方がより現実に近い考え方である。このような観点から、ファジーモデリングの妥当性が浮かび上がってくるわけである。

では、どのようにすれば、この問題点を解決しうるモデルの推定が行えるのか。これについては、近年、工学分野で発展してきたファジー理論の応用モデルによって、その可能性をみいだすことができるのである。

以下に、現在すでに開発されている「ファジー回帰モデル」の推定方法について少し述べておくことにする。

この「ファジー回帰(可能性線形)モデル」は、上に述べたようなこれまでの「回帰分析」の問題点をクリアするという目的で、現象のゆらぎを「確率過程」の問題として把握するのではなく、「ファジー領域」の問題として捉えようというものである。

たとえば、観測期間中に、説明変数のパラメータに変動がみられることをモデル化しようとする場合、

$$y_j = \Sigma A_i X_{ij} \qquad -(23)$$

として、

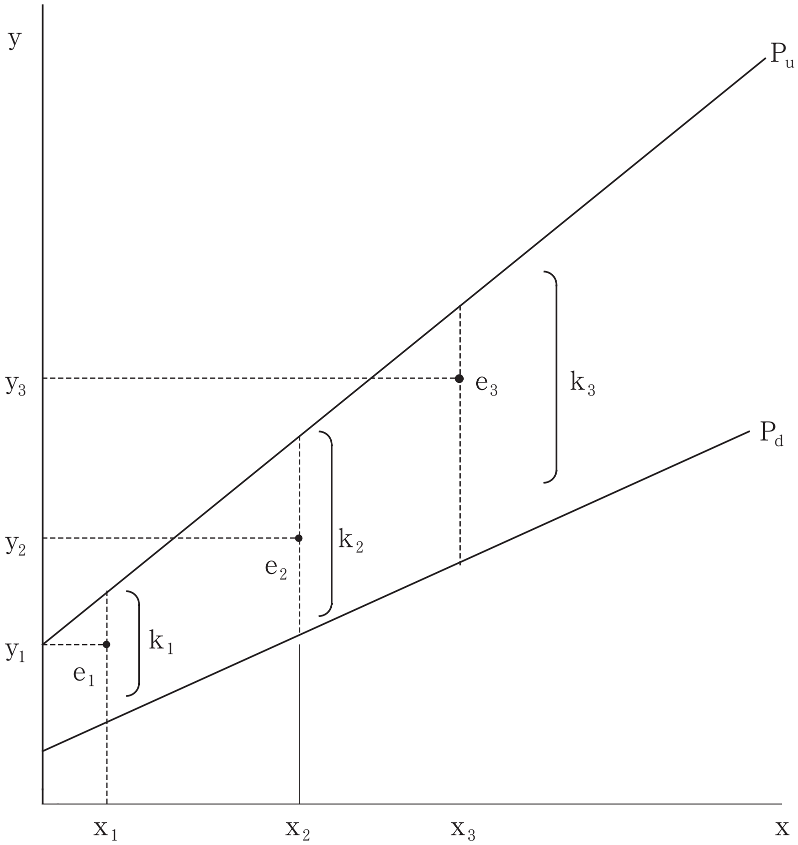
$$A_j = a_i \pm c_{ij} \qquad -(24)$$

とするわけである。ここで A_j をファジー係数として考えると、ファジー回帰モデルの適用が可能となる。周知のように、ファジーモデルは下図のように解釈できる。

現実値(e_i)に対応して与えられた x_i に対して、y_i の値のとりうる範囲は、
すなわち可能性の範囲は、「第１図」のように P_u（上限）と P_d（下限）に囲まれた k_i であるとする。このときの k_i の幅を最小に決定することが「ファジー回帰」の最重要な問題である[2)]。

２）この「ファジー回帰分析」の手法については参考文献(1)(8)(15)などの詳しい。

第１図



このことによって無限大の可能性の範囲を現実的に可能な範囲へと絞り込むわけで、この範囲内にある全ての値が y_i の妥当する値ということができるのである。これを図示すると、「第１図」のような座標軸上に現実値データをプロットし、そのデータをすべて内包できる線分 P_u と P_d を最小の幅で求めるということである。

この幅を有す領域がファジー領域と呼ばれるものであるが、これを

$$Y_j = A_j X_j \qquad -(25)$$

で示し、

$$A_j = \left(a_j,\ c_j\right) \qquad -(26)$$

と表記することにしよう。この c_j は Y_j のとりえる範囲を示すものであるから、上図の P_u と P_d に囲まれた範囲にある Y の値は以下のように示すことができる。

すなわち、問題は、

$$y_j \leqq a_j x_j + c_j \left| x_j \right| \qquad -(27)$$

$$y_j \geqq a_j x_j - c_j \left| x_j \right| \qquad -(28)$$

という制約条件のもとに

$$\min \Sigma c_j \left| x_j \right| \qquad -(29)$$

となる c_j を決定することである。

したがって、この「ファジー回帰分析」は、以下のような線形計画の問題に帰着させることができるのである。

$$\min \Sigma c_j \left| x_j \right| = J(c) \qquad -(30)$$

subject to
$$y_j \leqq a_j x_j + c_j \left| x_j \right| \qquad -(31)$$
$$y_j \geqq a_j x_j - c_j \left| x_j \right| \qquad -(32)$$
$$c \geqq 0 \qquad (j=1,\ \cdot\cdot\cdot\cdot,\ n) \qquad -(33)$$

4．ファジーモデルよる時系列データ分析のモデル化

a；メンバーシップ関数

ファジー解析を時系列データに適用する場合、どのようにファジー数（ファジー領域）を前提してモデリングするかが重要な問題である。これは、確率モデルにおける確率変数の位置づけと同様の意義を持つものであるということができる。

ここでは、仮に、最も一般的に知られている「ピラミッドタイプ」の「メンバーシップ関数」を前提しておくことにしよう。

すなわち、前述のシステムである

$$Y_j = \Sigma A_i X_{ij} = Ax' \qquad -(23)'$$
$$A_j = a_i \pm c_{ij} \qquad -(24)'$$

を考えた場合、ファジー数 A_j に対して、「メンバーシップ関数」は以下のように定義できるものとする。

ファジー数で表された係数ベクトル A は、直積空間（R^k）上の直積集合として、

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdot\cdot\cdot \times A_k \qquad -(34)$$
$$\eta A(a) = \min\left(\eta A_j\left(a_j\right)\right) \qquad -(35)$$

と定義し、

$$a = \left(a_1,\ a_2,\ \cdot\cdot\cdot,\ a_k\right)$$
$$i=1,\ 2,\ \cdot\cdot\cdot,\ k$$

である。

このとき、α_i はファジー数 A_i の中心を示し、c_i を非負の実数とすれば、「メンバーシップ関数」は[3)]

$$\eta_{Aj}(a_j)=\begin{cases}1-\dfrac{|\alpha_i-a_i|}{c_i}\ ; \\ \alpha_i-c_i<a_i<\alpha_i+c_i \\ 0 \qquad ;\text{その他}\end{cases} \qquad -(36)$$

と表せる。

これを(23)'式の係数ベクトル A(＝(a，c))について表記し直したとき、

$$\eta_{y_\ell}(y_\ell)=\begin{cases}1-\dfrac{|y_1-\alpha_i x'|}{\Sigma c_i x_{\ell i}}\ ; \\ \alpha_i x'-\Sigma c_i|x_{\ell i}|<a_i<\alpha_i x'+\Sigma c_i|x_{\ell i}| \\ 0 \qquad ;\text{その他}\end{cases} \qquad -(37)$$

が得られる。

このように「メンバーシップ」関数を特定したとき、モデル推定値(Y^e)の観測値(Y)との適合性は

$$h_1=\sup\min\left\{\eta_{Y_\ell(y)},\ \eta_{Y^e_\ell(y)}\right\}$$

とすることができ、これが「適合度」と呼ばれるものである。

この適合度と推定値・観測値の関係を図示したものが「第2図」である。この図に示したように、適合度のレベルが推定値と観測値の両方のメンバーシップの一致する大きさを規定することになる。この意味で、推定結果の判定において「適合度」は確率モデルにおける「棄却率」のような意義を持つことになる。したがって、ファジー推定の問題は、妥当な或一定の「適合度」のもとに、あいまいさ、すなわち、式に表現するならば

$$S=\Sigma w_i c_i \qquad (w_i：\text{各係数のウェイト})$$

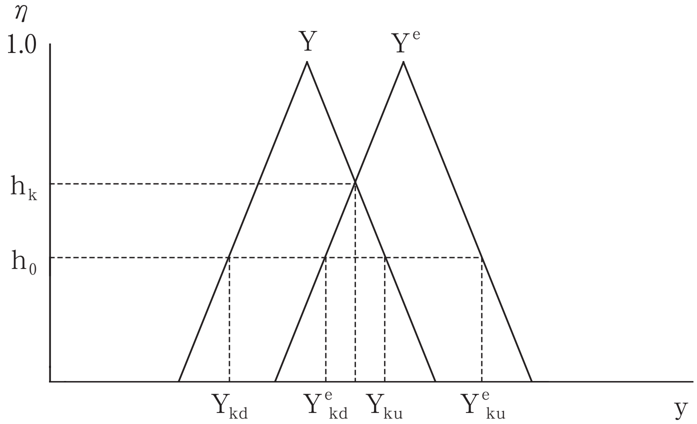
を最小にすることであるということができるのである。

このことは、前節3において述べた「ファジー回帰分析」についても全く同様のことがいえるのである。

3）メンバーシップ関数には「ファジー集合」の把握の仕方によって、「ピラミッド型」「2次関数型」「ガウス型」「確定型」などの型を考えることができるが、最も一般的なものが「ピラミッド型」といえる。

具体的には、上記のような「メンバーシップ関数」を設定して、「ファジー回帰」を適用した場合、従属変数の各データ毎に「第２図」のような推定値と観測値についての図を描くことができる。その推定領域の妥当な範囲を一定の「適合度」の制約の下で最小の幅に設定したものが「ファジー回帰」による「ファジー領域」ということができるのである。

第２図



※ Y_{kd}：Y_k の下限　Y^e_{kd}：Y^e_k の下限
Y_{ku}：Y_k の下限　Y^e_{ku}：Y^e_k の下限

ｂ；ファジー自己回帰モデル[4)]

さて、第２節に示したような時系列解析をファジーモデルによって処理することを考えた場合、上述の「ファジー回帰モデル」を利用した「ファジー自己回帰モデル」を定式化することになるが、ファジーモデル、特に、「ファジー回帰モデル」をそのままの形で時系列データに適用する場合、幾つかの問題点をあげることができる。

その最も大きな問題点は、「時系列データ」とくに「経済時系列データ」が、時間（期）の変化に対応したトレンドを有す場合が多いということに起因するものである（例えば、GNP のように時間の流れに沿って成長トレンドを有す様なケースをあげることができる）。このような場合、もし単純に「ファジー回帰モデル」を適用すれば、その成長トレンドを有する独立変数のファジー係数（(a，c）の c）倍だけファジー領域が増大して行くことになる。したがって、時間の経過や独立変数の値の増大とともにファジー領域が拡大する

4）ファジー時系列解析モデルについては、確率的時系列解析モデルの AR モデル・MA モデル・ARMA モデルの各モデルに対応させたファジー時系列解析モデルを本誌前号掲載の拙論(11)に論じておいてので参照して欲しい。

という「発散過程」を示すことになるのである。

「ファジー回帰モデル」を「自己回帰モデル」に適用しようとする場合、以下のように定式化するのが一般的である。

$$\min \Sigma c_j \left| x_{n-i-j} \right| = J(c)\ ;\ c \geqq 0 \quad (j=1,\ \cdots\cdots,\ n) \qquad -(38)$$

subject to

$$\left| x_{n-i} - \Sigma a_j x_{n-i-j} \right| \leqq \Sigma c_j \left| x_{n-i-1} \right| \quad (j=1,\ \cdots\cdots,\ n) \qquad -(39)$$

しかし、この推定システムでは、上記の問題をクリアすることはできない。そこで、

$$\min \Sigma c_j \left| x_{n-i-j} \right| = J(c)\ ;\ c \geqq 0 \quad (j=1,\ \cdots\cdots,\ n) \qquad -(40)$$

subject to

$$\left| x_{n-i} - \Sigma a_j x_{n-i-j} \right| \leqq \left(1-h_n\right) \Sigma c_j \left| x_{n-i-1} \right| \quad (j=1,\ \cdots\cdots,\ n) \qquad -(41)$$

として、「適合度」(h) を導入し、これを(推定)期の変化とともに「修正」することによって発散等の問題点をクリアしようという試みがなされた[5)]。

また、一方、「自己回帰モデル」ではなく、単に独立変数に時間変数を採用した

$$Y = A_0 + \Sigma A_i t_i \qquad -(42)$$

という形式のモデルではあるが、興味のある方法で処理することを提案している[6)]。この概略を以下に示すことにしよう。

ファジー数の帰属度関数を

$$\eta_{yL(y)} = 1 - \frac{y - \alpha_L}{c_L} \qquad -(43)$$

$$L = -1,\ -2,\ \cdots,\ -n$$

とし、ここで、α_L, c_L は

$$Y_U = \max\left[y_{L-1},\ y_L,\ y_{L+1}\right] \qquad -(44)$$

5) 参考文献(13)pp.146－157において試みられたモデルである。

6) 参考文献(24)pp.180－186で公表されたモデルであるが、「自己回帰モデル」など「時系列解析」モデルとはいえない。

$$Y_d = \min\left[y_{L-1},\ y_L,\ y_{L+1}\right] \qquad -(45)$$

$$\alpha_L = Y_U - c_L$$
$$= Y_d + c_L \qquad -(46)$$
$$c_L = \left(Y_U + Y_d\right) / 2 \qquad -(47)$$

であるとする。これによって原系列 y_L から「可能性分布」を内含したファジー数 Y_1 を算定し、それをデータとして使用するという方式である。

このような幾つかの工夫を行って、時系列データの「ファジー分析」は試みられた。しかしながら、前者（(38)(39)式）の方式では、推定を時期毎に進めるにさいして（すなわち n を１つ進める毎に）、適合度の修正を行わなければならず、また、後者（(41)〜(45)式にもとづくシステム）を「自己回帰モデル」として改めて定式化しようとすれば、従属変数のファジー数 Y に時期のずれた y_1 が使用されているという点から、問題の起こるところとなる。

したがって、このような方法によるモデルを「時系列解析」のための「ファジーモデル」として利用することについては問題視せざるを得ない。

５．ファジー回帰分析の新しい推定システム

実は、「時系列解析」の中心的命題はデータの定常性を仮定しているということができるものである。

これについて、従来の「ファジー回帰」が

$$Y_j = \left(a_j, c_j\right) X_j$$

という式の推定、すなわち、「第１図」のように X のパラメータ a に±c という巾を持たせるというものであった。前述したように、この場合、X の値が大きくなるにしたがって、ファジー領域（k_1〜k_3）も相対的に増大するということになる。いわば、発散的になるということになるわけである。この場合、「定常性」の仮定を満たす条件としては、ファジー領域も「定常的」でなければならないはずであり、そのためには、データに完全な定常性が求められることになる。

これは或意味では「ファジーモデリング」の考えと矛盾するものであり、現実のデータに仮定することが困難なものである。さらに、このようなパラメーターを前提した場合、「確率モデル」の「自己回帰モデル」における「確率過程」に対応する「ファジー領域」推定は「自己回帰モデル」の次数が高くなるほど問題の多いものとなってくる。

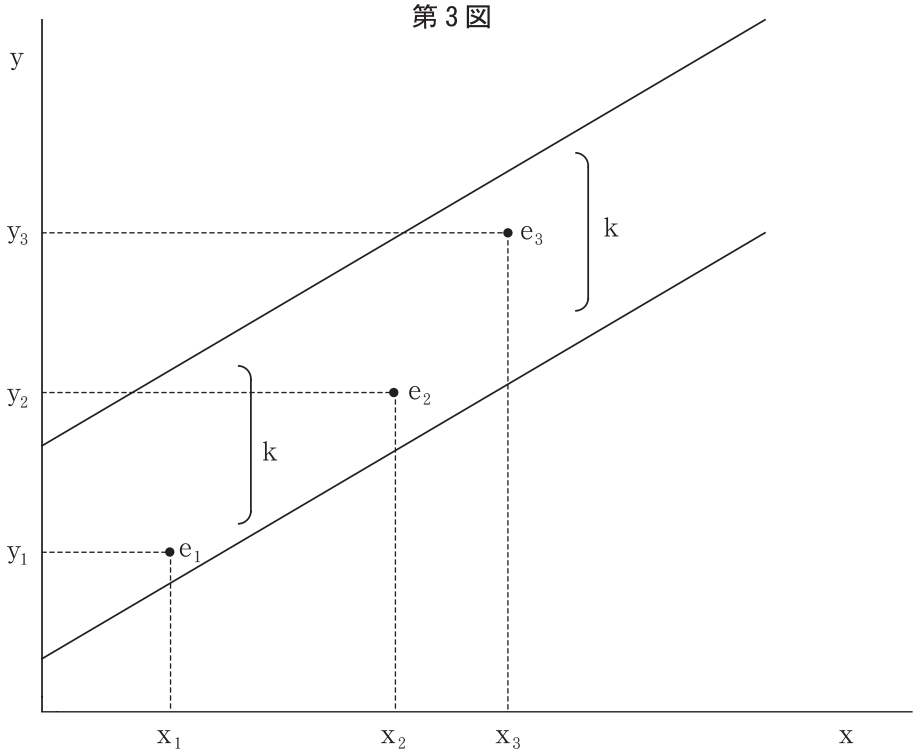
このような難点を克服するために、「システム全体」で１つの「ファジー領域」が設定できるような－すなわち、パラメーター毎にファジー領域が設定されるものでない－推定方法が求められるところである。

このような「ファジー推定」が可能となれば、例えば、トレンドの顕著なデータにおいてさえ「発散過程」を内含することなくモデル化することができるはずであり、データの循環的変動は「ゆらぎ」としてモデル化することができることになる。

このような「ファジーモデル」は、第３図にみられるような平行の状態に近いファジー領域をもつ、すなわち x の値が相対的に増大してもファジー領域(k)が相対的に増大しないようなものであることが必要である。

このような条件を満たした「ファジー回帰モデル」の推定について述べることにしよう。

第３図



まず、上図に示したような「ファジー領域」の推定を行う「回帰システム」は、以下のように定式化することができる。

「ファジー関数」を

$$y_j = \Sigma\left(a_{ij}x_{ij} \pm c_{ij}\right) \qquad -(48)$$

とすれば、各係数における c_jx_j という「ファジー推定」の拡散項がなくなり、「ファジー

域」は x_j が成長トレンドを示したとしても、定常的な領域を示すことになる。したがって、この(48)式を推定することができれば、上記の問題の多くが解消されることになるはずである。

この(48)式から

$$\left|y_j\left(1+\Sigma\frac{c_{ij}}{y_j}\right)\right| \leqq \left|\Sigma a_{ij}x_{ij}\right| \qquad -(49)$$

を得るが、これにもとづいて以下のように展開することができる。

まず、

$$\Sigma C_{ij}=\Sigma\frac{c_{ij}}{y_i} \qquad -(50)$$

とし、これを(49)式に代入して、

$$\left|\left(1+\Sigma C_{ij}\right)\right| \leqq \left|\Sigma a_{ij}x_{ij}／y_j\right| \qquad -(51)$$

を得る。

すなわち、推定の問題は

$$\min \Sigma C_j = J(C)\,;\quad C \geqq 0 \quad (j=1,\ \cdot\cdot\cdot\cdot,\ n)$$

subject to

$$\left|\left(1+\Sigma C_{ij}\right)\right| \leqq \left|\Sigma a_{ij}x_{ij}／y_j\right|$$

となる。

このような、新しい「ファジー回帰モデル」を「時系列解析」に適用するためには以下に示すように改めればよい。

$$x_{n-1}=\Sigma\left(a_j x_{n-i-j} \pm c_j\right) \qquad ;(j=1,\ \cdot\cdot\cdot\cdot,\ n) \qquad -(52)$$

$$C_j=\Sigma\frac{c_j}{x_{n-i}} \qquad -(53)$$

とすると[7)]、

7）この(53)式は x_{n-1} に対する c_j の比率の合計であり、それは従属変数に対するモデル推定値のファジー領域の大きさを示すもので、一種のその時点での曖昧さを示す指標となる。

$$\min \Sigma C_j = J(C)\,;\quad C \geqq 0 \quad (j=1,\ \cdots\cdots,\ n) \qquad -(54)$$

subject　to

$$\left|\left(1+\Sigma C_j\right)\right| \leqq \left|\Sigma a_j x_{n-i-j} / x_{n-i}\right| \qquad -(55)$$

という上の2式を解けばよい推定システムとなるのである。

また、この推定システムに「適合度」を導入することを考えた場合、次のように(55)式を改めることができる。

$$\left|\left(1+(1-h)\Sigma C_j\right)\right| \leqq \left|\Sigma a_j x_{n-i-j} / x_{n-i}\right| \qquad -(56)$$

以上のようなファジー回帰分析システムによる。「時系列解析」への適用がどのような意味を有するものであるかを確認するために例を示すことにしよう。

以下の、サンプルデータを用いて、上記の新ファジー回帰による推定結果と、これまでのファジー回帰分析システムによる推定結果を比べてみることにする。

（サンプルデータ）

期	値	期	値	期	値
1	296.79	8	249.26	15	138.12
2	296.55	9	237.51	16	144.88
3	268.51	10	237.61	17	134.59
4	210.44	11	238.05	18	126.62
5	219.14	12	168.03	19	111.06
6	226.75	13	144.52	20	102.18
7	220.53	14	128.20	21	93.97

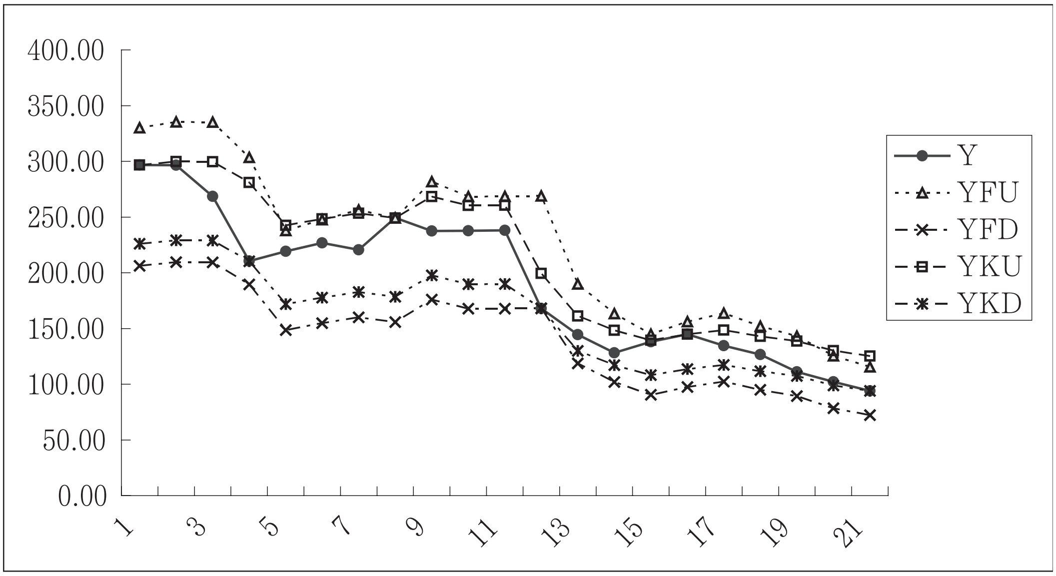
上のデータは、「東京外国為替相場」（暦年平均値）の1975－1995年値で、これを $X_i = f\left(x_{i-1}\right)$ 形式の「自己回帰モデル」によって推定されたものである。

その結果を「第4図」に示したが、YFU，YFD はそれぞれ「これまでのファジー回帰」によるファジー上限、ファジー下限の推定値であり、YKU、YKD は「新推定システム」によるファジー上限、ファジー下限を示すものである。この図が示すように、「新推定システム」によるファジー領域は期間を通じて「これまでのファジー回帰」のそれよりも幅の狭いことを示し、同時に Y の値の拡大（この例は期とともに縮小しているので収斂し

ているように見えるが、期間が21期から１期に近づくほどファジー幅が拡大していることを注意してほしい）によってファジー領域の拡大現象が見られるのに対して、「新システム」のそれは、かなり幅の小さなものとなっている。

※この推定に際し、為替相場の質的変動が観測期間において生じたと考えられるところがあり、そのために、推定期間を１期から11期、12期から21期と２つに分けて推定したものである。

第４図



この例が示すように、新推定システムはこれまでのものに比べて「時系列解析」への適用が優れていることが確認できるという結果が得られた。

６．おわりに

以上に述べたように、新しく開発した時系列解析のための「ファジー回帰分析」の推定システムは、ファジー領域を独立変数のパラメーターに帰属させるのではなく、従属変数の推定値に帰属させるものである。したがって、そのファジー領域の性格は、従属変数のファジー数としての性格をより強くしたものであるということができるものである。

なお、適切な時系列解析の例をもって、この新推定システムの活用とその分析を進めて行くことが課題であるが、拙著文献(11)で提案したような、「自己回帰モデル」以外の、特に「移動平均モデル」「ARMA モデル」のファジー推定方法の開発研究も行い、新推定システムによるモデルの同定や推定結果の評価等の手法と分析の開発研究も行う必要性を感じられるところである。これらの開発研究の報告については次の機会に譲ることにする。

参考文献

（１）浅野喜代治・寺野寿郎・菅野道夫『ファジィシステム入門』，オーム社，1987年，chap.4，5，6，7

（２）宇沢弘文編『日本経済－蓄積と成長の軌跡』，東京大学出版会，1989年，chap.6

（３）宇沢弘文編『日本企業のダイナミズム』，東京大学出版会，1991年，pp.48－79.

（４）内田忠夫『日本経済論』，東京大学出版会，1987年，pp.3－113

（５）占部都美『現代の企業行動』，白桃書房，1967年，p.331

（６）占部都美『企業の意思決定論』，白桃書房，1979年，chap.1，6，9

（７）勝木太一『日本経済の計量モデルによるフィリップス・カーブの分析』（上・下）、現代経済研究センター，1990年

（８）勝木太一「企業行動における意思決定構造の考察（その１）」，『松阪政経研究』，vol.12，No.1，松阪大学，1994年，pp.242－260.

（９）勝木太一「企業行動における意思決定構造の考察（その２）－ファジー回帰システムによる推計とその検証」，『松阪政経研究』，vol.13，No.1，松阪大学，1995年.

（10）勝木太一「企業行動における意思プロセスの考察－投資行動についてのファジー回帰システムによる分析」，『経済経営論叢』，vol.29，No.3，京都産業大学，1995年.

（11）勝木太一「ファジー時系列解析の新手法とその理論的条件」，Review of Economics and Information Studies，vol.７，No.1・2，岐阜聖徳学園大学，2006年９月.

（12）佐藤義信『トヨタグループの戦略と実証分析』，白桃書房，1988年

（13）杉原敏夫『経営・経済のための時系列分析と予測』，税務経理協会，1992年

(14) 染谷恭次郎・木下照嶽『経営分析－基礎と実践』，森山書店，1979年

(15) 田中英夫『ファジィモデリングとその応用』，朝倉書店，1990年，pp.74－85，
pp.134－159.

(16) 中西健一・他６名『企業行動の多面的分析』，晃洋書房，1983年，chap.7－12

(17) 中村隆英・西川俊作・香西泰編『現代日本の経済システム』，東京大学出版会，
1985年，pp.153－170，PP.244－270.

(18) 新飯田　宏編著『日本経済の構造変化と産業組織』，東洋経済新報社，1987年，
pp.136－181.

(19) 西田耕三『企業行動科学の基礎』，白桃書房，1979年，pp.152

(20) 日本大学経済学研究会『現代企業の行動分析』，勁草書房，1989年，pp.3－15，
pp.143－191.

(21) 堀江康熙編著『日本企業の景気変動と企業行動』，1987年，pp.32－47，
pp.146－173.

(22) 星野靖雄『企業行動と組織動学』，白桃書房，1977年，pp.10－43.

(23) 松行康夫『経営計画モデル』，税務経理協会，1988年，chap.3－5.

(24) 和多田・田中・横山・浅居「ファジィ時系列モデルと予測問題への応用」，
『日本経営工学会誌』，Vol．34，No.3．1983年

(25) R.E.Bellmann & L.H.Zadeh，"Decision Making in a Fuzzy Environment"，
Management Sci.，17，1970，pp.141－164.

(26) R.M.Cyert & March，J.G.，*A Behavioral Theory of Firm*，1963，chap.3－5.

(27) D.Dubois，"Linear Programming with Fuzzy Data"，in J.C.Bezdek Ed.，
Analysis of Fuzzy Infomation Vol.3，CRC Press 1987，pp.241－263.

(28) H.J.Zimmermann, " Description and Optimization of Fuzzy Systems", *Journal of General Systems*, 2, 1976, pp.209−215.

(29) H.J.Zimmermann, "Fuzzy programming and linear programming with several objective Function", *Fuzzy Sets and System*, 1, 1978, pp.45−56