

# 改良3段ルンゲ・クッタ型スキームの漸近安定性

齊 藤 善 弘

## 概 要

確率微分方程式の陽的解法に改良3段ルンゲ・クッタ型スキームがある。本稿では、改良3段ルンゲ・クッタ型スキームの漸近安定性について調べ、安定領域を図示する。また、オイラー・丸山スキームの安定領域と比較し、結果を述べる。

## 1. はじめに

1次元すなわちスカラー自励系の伊藤型確率微分方程式に対する確率初期値問題 (SIVP)

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), \quad t > 0, \quad X(0) = X_0 \quad (1)$$

を考える。ここで  $W(t)$  は標準ウィナー過程である。実数値関数  $f(x)$  と  $g(x)$  は十分滑らかとする。また、 $f$ 、 $g$  は各々ドリフト係数 (drift coefficient)、拡散係数 (diffusion coefficient) と呼ぶ。確率微分方程式の数値スキームの安定性について、常微分方程式の数値解法と同様、研究されている [1, 2, 4, 5, 7]。特に Bryden and Higham [1] や Higham [4] は確率  $\theta$  法 (stochastic  $\theta$  method) に対する漸近安定性の結果を与えた。確率  $\theta$  法は  $\theta = 0$  のとき陽的スキーム、すなわちオイラー・丸山スキームになる。オイラー・丸山スキームは、SIVP (1) の  $t = t_n = nh$  ( $h > 0$ ) における解  $X(t_n)$  に対する近似解を  $X_n$  とすると、次式で与えられる。

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n)h + g(X_n)\xi_n\sqrt{h} \quad (2)$$

ここで、 $h = t_{n+1} - t_n$  はステップ幅を意味し、各  $\xi_n$  は平均 0、分散 1 の独立な標準正規乱数  $N(0; 1)$  である。また、 $\xi_n\sqrt{h}$  でもってウィナー過程の増分  $\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n)$  を模擬する [5]。オイラー・丸山スキームの強い収束次数は  $1/2$  であることが知られている [5]。

オイラー・丸山スキーム (2) の漸近安定性を調べる場合、次の乗法的ノイズをもつスカラー線形テスト方程式、

$$dX(t) = \lambda X(t)dt + \mu X(t)dW(t), \quad t > 0, \quad X(0) = 1 \quad (3)$$

を考える。ここで、定数  $\lambda$  と  $\mu$  は実数、ただし  $\mu \geq 0$  とする。テスト方程式 (3) の厳密解は

$$X(t) = \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)t + \mu W(t)\right) \quad (4)$$

となるから、解(4)は  $\lambda - \frac{1}{2}\mu^2 < 0$  のとき、平衡解  $X(t) \equiv 0$  が大域的確率漸近安定になる [3]。  
すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = 0, \quad \text{w.p.1}$$

を満たす。スキームによる (3) の近似解  $X_n$  が、大域的確率漸近安定性と同様の性質、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n| = 0, \quad \text{w.p.1} \quad (5)$$

を満たすことが期待される。そこで、数値スキームによる近似解  $X_n$  が性質 (5) を満たすとき、スキームは漸近安定性をもつと呼ぶことにする [1, 4]。

さて、オイラー・丸山スキーム (2) をテスト方程式 (3) に適用すると、漸化式

$$X_{n+1} = (a(p) + b(q)\xi_n)X_n, \quad a(p) = 1 + p, b(q) = \sqrt{q}$$

を得る。ここで、 $p = \lambda h$ ,  $q = \mu^2 h$  とおいた。このように数値スキームをテスト方程式 (3) に適用すると

$$X_{n+1} = R(p, q; \xi_n)X_n \quad (6)$$

の形式を得る。オイラー・丸山スキームの場合は、 $R(p, q; \xi_n) = 1 + p + \sqrt{q}\xi_n$  となる。数値スキームの安定領域  $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^2$  を次のように定義する。

$$\mathfrak{R} := \{(p, q) : q \geq 0 \text{ かつ 数値スキームが漸近安定性をもつ}\}$$

テスト方程式 (3) が大域的確率漸近安定となる条件  $\lambda - \frac{1}{2}\mu^2 < 0$  は  $q > 2p$  となることに注意する。

本稿の目的は、改良3段ルンゲ・クッタ型スキームの漸近安定性について調べることである。改良3段ルンゲ・クッタ型スキームは、確率微分方程式のドリフト係数および拡散係数に対して、常微分方程式の3次のホイン公式 [6] を適用し、補正項を加えたスキームで、齊藤・三井 [8] が提案した。改良3段ルンゲ・クッタ型スキームは、SIVP (1) に対して、次の形式をもつ。

$$\begin{aligned}
X_{n+1} = & X_n + \frac{1}{4}(F_1 + 3F_3)h + \frac{1}{4}(G_1 + 3G_3)\xi_n\sqrt{h} \\
& + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[f'g - fg' - \frac{1}{2}g^2g''\right](X_n)\tilde{\xi}_nh\sqrt{h}
\end{aligned} \tag{7}$$

ここで

$$\begin{aligned}
F_1 &= f_{1/2}(X_n), & G_1 &= g(X_n), \\
F_2 &= f_{1/2}(X_n + \frac{1}{3}F_1h + \frac{1}{3}G_1\xi_n\sqrt{h}), & G_2 &= g(X_n + \frac{1}{3}F_1h + \frac{1}{3}G_1\xi_n\sqrt{h}), \\
F_3 &= f_{1/2}(X_n + \frac{2}{3}F_2h + \frac{2}{3}G_2\xi_n\sqrt{h}), & G_3 &= g(X_n + \frac{2}{3}F_2h + \frac{2}{3}G_2\xi_n\sqrt{h}), \\
f_{1/2} &= \left[f - \frac{1}{2}gg'\right](x)
\end{aligned}$$

である。スキームに現れる $\tilde{\xi}_n$ は $\xi_n$ と互いに独立な標準正規乱数 $N(0;1)$ である。また、改良3段ルンゲ・クッタ型スキームの収束次数は1である [8]。

本稿では、まず、オイラー・丸山スキームの漸近安定性について、論文 [1, 4] に基づき、その安定領域を図示する(2節)。次に改良3段ルンゲ・クッタ型スキームの漸近安定性を調べ、結果を述べる(3節)。

## 2. 漸近安定性解析

オイラー・丸山スキームの漸近安定性を調べるのに、Higham が導出した次の定理を使う [4]。  
**定理 1** 独立かつ同一に分布される、非負の実確率変数 $Z_i (i=0,1,\dots,n-1)$ が与えられていて、

$$Y_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} Z_i\right) Y_0$$

で定義される確率変数の列 $\{Y_n\}$ を考える。ここで $Y_0 \geq 0$ かつ $Y_0 \neq 0, \text{w.p.1}$ を満たしている。確率変数 $\log(Z_i)$ が二乗可積分であると仮定すると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0, \text{w.p.1} \Leftrightarrow \mathbb{E}[\log(Z_i)] < 0, \forall_i$$

が成り立つ。ここで $\mathbb{E}[\cdot]$ は期待値を表す。

オイラー・丸山スキームに対して、 $Y_n = |X_n|$ ,  $Z_i = |R(p, q; \xi_i)| = |a(p) + b(q)\xi_i|$  として、定理 1 を適用すると

$$(p, q) \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \mathbb{E}[\log|a(p) + b(q)\xi_n|] < 0 \quad (8)$$

を得る [1]。よって

$$\mathbb{E}[\log|a(p) + b(q)\xi_n|] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \log|a(p) + b(q)u| e^{-u^2/2} du \quad (9)$$

を評価すればよい。 $\mathbb{E}[\log|a(p) + b(q)\xi_n|]$  をオイラー・丸山スキームの安定性関数と呼ぶことにする。一般に、数値スキームをテスト方程式 (3) に適用して得られた漸化式 (6) の場合、安定性関数は

$$\mathbb{E}[\log|R(p, q; \xi_n)|] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \log|R(p, q; u)| e^{-u^2/2} du$$

となる。式 (9) に現れる積分の評価法には、[1, 4] のように数式処理システム **Mathematica** を利用する方法と **Burrage and Tian** [2] による方法がある。本論文では [1, 4] と同様に **Mathematica** を利用する。ただし、安定領域の図示化は [1, 4] のように、その境界線を描く手法ではなく、 $(p, q)$  平面上の格子点  $(0.05 \times n_p, 0.05 \times n_q)$  において安定性関数 (9) を評価し、条件 (8) によりプロットする手法をとる。ただし、 $n_p \in \mathbb{Z}$ ,  $n_q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  とする。オイラー・丸山スキームの安定領域を図示すると、図 1 のようになり、文献 [1] の結果 ( $\theta = 0$ ) と一致する。

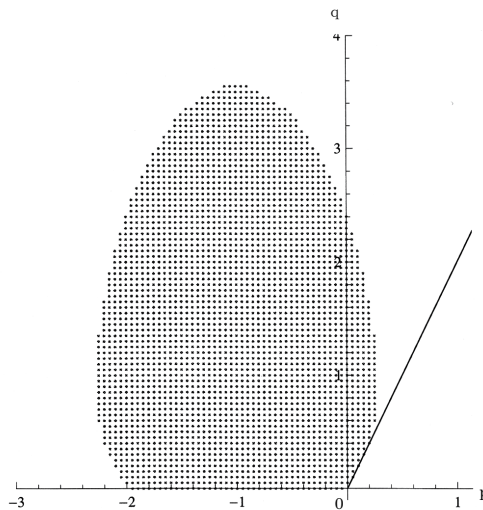


図 1. オイラー・丸山スキーム (2) の安定領域

## 3. 改良3段ルンゲ・クッタ型スキームの漸近安定性

本節では、改良3段ルンゲ・クッタ型スキーム (7) の漸近安定性について調べる。スキーム (7) の安定性関数は

$$\mathbb{E} [\log |R(p, q; \xi_n)|] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \log |a(p) + b(p, q)u + c(p, q)u^2 + d(q)u^3| e^{-u^2/2} du \quad (10)$$

となる。ここで、

$$a(p) = 1 + p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{6}, \quad b(p, q) = (1 + p + \frac{p^2}{2})\sqrt{q},$$

$$c(p, q) = (1 + p)\frac{q}{2}, \quad d(q) = \frac{q\sqrt{q}}{6}$$

である。スキーム (7) を線形の方程式に適用した場合、 $\tilde{\xi}_n$  の項は、整理するとなくることに注意する。スキーム (7) の安定領域を図示したのが図2である。

図1と図2とを比較すると、改良3段ルンゲ・クッタ型スキームの安定領域は、高さはオイラー・丸山スキームのそれと同程度であるが、完全に含んでおらず、 $p$  軸の正方向に傾いていることがわかる。また、常微分方程式に対する結果と同様、つまり  $q = 0$  で両スキームを比較すると、改良3段ルンゲ・クッタ型スキームの方がオイラー・丸山スキームより安定区間が長い。

$q \leq 2p$  では、厳密解 (4) は大域的確率漸近安定ではないが、図2をよく見ると、 $q \leq 2p$  で漸近安定性をもつ部分が存在する。オイラー・丸山スキームの結果、図1についても、直線

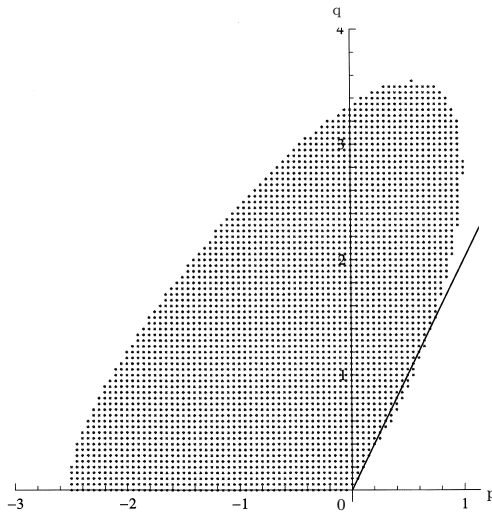


図2. 改良3段ルンゲ・クッタ型スキーム (8) の安定領域

$q = 2p$  上に漸近安定性をもつ点が存在する。そこで、オイラー・丸山および改良3段ルンゲ・クッタ型スキームの安定性関数 (9) および (10) を直線  $q = 2p$  上で評価してみる。

$$H(p) = \mathbb{E} [\log |R(p, 2p; \xi_n)|] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \log |R(p, 2p; u)| e^{-u^2/2} du$$

とおき、描いたグラフが図3である。二つのグラフを見ればわかるように、両スキームとも、 $H(p) < 0$  となる区間が存在する。ゆえに、オイラー・丸山スキームおよび改良3段ルンゲ・クッタ型スキームは  $q \leq 2p$  において漸近安定な部分が存在することがわかった。

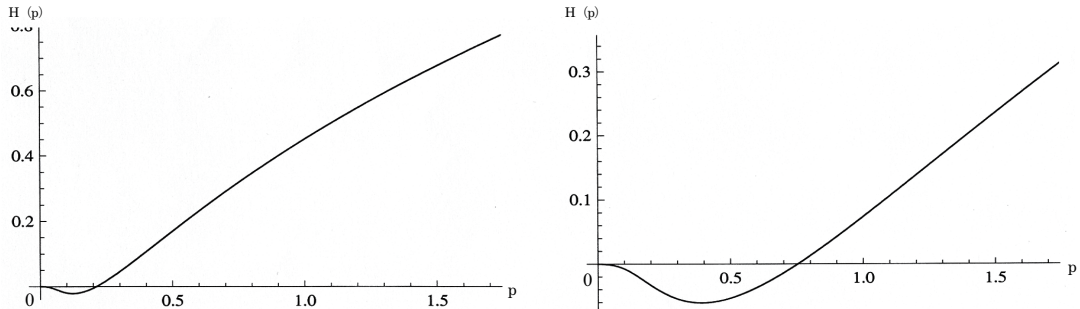


図3. 左：オイラー・丸山スキーム、右：改良3段ルンゲ・クッタ型スキーム

### 参考文献

- [1] Bryden, A. and D. J. Higham, 2003, “On the boundedness of asymptotic stability regions for the stochastic theta method”, *BIT Numerical Mathematics*, Vol. 43, pp1-6
- [2] Burrage, K. and T. Tian, 2001, “The composite Euler method for stiff stochastic differential equations”, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.131, pp 407- 426
- [3] Gard, T. C., 1988, *Introduction to Stochastic Differential Equations*, Marcel Dekker
- [4] Higham, D. J., 2000, “Mean-square and asymptotic stability of the stochastic theta method”, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 38, pp 753-769
- [5] Kloeden, P. E., and E. Platen, 1992, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag
- [6] 三井斌友、『常微分方程式の数値解法』、岩波書店、2003
- [7] 三井斌友、小藤俊幸、齊藤善弘、『微分方程式による計算科学入門』、共立出版、2004
- [8] 齊藤善弘、三井斌友、「確率微分方程式の離散近似」、日本応用数理学会論文誌、第2巻第1号、1992、pp 1-16