

素粒子の六元外積模型（中編）

蔵 琢也¹ 蔵 研也

Abstract (概要) 前編で示した五元外積模型の具体的な素粒子との対応を訂正し、SU(5) と等価な表現に直す。また、その特徴といくつかの具体例を述べる。その上で、あらたな「世代因子」を付け加えた六元外積模型を一つ例示し、具体的な対応と、弱い相互作用の混合角を中心にした議論を行う。この模型の最大の特徴は、外積構造の因子の交換という一次構造の上に、基底の混ぜ合わせという二次構造が存在する点である。

PMNS 行列は大角度混合行列であり、三二角行列に近い値を示すが、それは外積基底を混合して電荷等を等量にしていると見なせる。するとクォークに対応する CKM 行列では打ち消しあいが起こり、対角に近い行列になりえる。その他、三二角行列の自由度とヒッグス場の候補、陽子崩壊を制限する条件など、関連事項について考察する。最後に、演繹的ではなく、帰納的な研究方針の必要性を述べる。

1. 五元外積模型の訂正と補足

(1) クォークとの対応の訂正

記号は、原則として前編を踏襲する。

前編で提示された五元外積代数の元と現実の素粒子では、弱い相互作用に対するクォークの性質が違っており、不適切で誤りであった。しかしこの修正は容易である。その結果はより自然なものになり、かつ Georgi & Glashow (1974) の SU(5) を外積代数で表現した形式になる。とはいえ、外積代数は単なる表現論より強い構造を持っているので、それが現実の素粒子の組成や性質にも強い影響を与える。

訂正点は、基礎因子の割り当てと前論文 (蔵&蔵, 2014) の表 (1.4.2) であり、クォークへの弱い相互作用の左右対応が誤っており、現実と反対になっていた。以下の表 (1.1.1) 対応が正しい。

基礎因子の割り当ては $\{v, l, q, q, q\} = \{v_L, e_L, \bar{d}_L \times 3\}$ と、すべて左巻を割り当てるように訂正する。前論文ではクォーク部分の巻を反対に $\{v, l, q, q, q\} = \{v_L, e_L, \bar{d}_R \times 3\}$ と割り当てていた。また、左右価 1 も各基礎因子に割り当て、総計が奇数の粒子は左巻き、偶数は右巻きとする。こうすると前論文 (1.4.2) も変わり、以下となる。

1 淑徳大学総合福祉学部 260-8701 千葉市中央区大巖寺町 200

表 (1.1.1)

0次	$\{v_R\}_R$
1次	$\{v_L, e_L^-, \bar{d}_L \times 3\}_L$
2次	$\{e_R^-, \bar{d}_R \times 3, \bar{u}_R \times 3, u_R \times 3\}_R$
3次	$\{\bar{u}_L \times 3, u_L \times 3, d_L \times 3, e_L^+\}_L$
4次	$\{\bar{v}_R, e_R^+, d_R \times 3\}_R$
5次	$\{\bar{v}_L\}_L$

この新しい割り当ての場合、左巻きと右巻きが次数について交互に現れてより単純になっている。そして「捩じれ SU(5)」ではなく、Georgi & Glashow (1974) の SU(5) 模型そのものの別表現になる。したがって外積構造を除いて、SU(5) 模型の長所と短所をほとんど引き継ぐことになる (註1)。

(2) 様々な補足

この模型を六元外積に拡張する前に、補足と追加の作用素を定義しておく。

第一に、前編で述べたように、外積を構成する各因子は「粒子」ではなく、内部空間を構成する「素材」である。外積の各基底、及びその混合は、内部空間での位置を示すラベルである。因子数が偶数だからといってボソンにはならず、すべてフェルミオンであることを、念のため注意しておく。

第二に本論文の一連の模型では、粒子と反粒子、右巻きと左巻きは別の構造を持っているが、外積の構造から関連している。すると強い相互作用でも独立ではありえず、アクシオンの必要性は薄い。今までの探索にもかかわらずアクシオンは発見されていないことを考え合わせれば、存在しないと予想する。

第三に、前論文で導入された作用素に修正を加えた新作用素を定義しておく。前論文 1. 3 節⑦で導入した i, j を位数 4 で入れ替える作用素 $b_{i,j}$ は、リー代数的でかつ代数的に単純ではあるが、作用の対象としない基底を切り捨てるため、外積代数を 2^n 次元ベクトル空間とみたときに等長ではない。そこで、 i, j を入れ替えるが、両方の添え字に関係のない基底は変化させないリー群的なユニタリー作用素 $B_{i,j}$ を導入する。

$$\textcircled{8} \quad B_{i,j} = b_{i,j} + P_i P_j + \bar{P}_i \bar{P}_j - \delta_{i,j} \quad (1.2.1)$$

この群論的位数も 4 である。この二つの作用素はリー代数とリー群の関係といえる。ただし少し複雑になっており、 $b_{i,j} = -b_{j,i}$ であるが (前論文 (1.3.⑦)、 $B_{i,j} \neq -B_{j,i}$ にはならないことに注意せよ。「粒子像」についてはリー環的な $b_{i,j}$ がより相応しいが、代数的な計算はその「積分」あたる $B_{i,j}$ を使うのが便利であろう。

（3）いくつかの例

前論文や本論文はかなり抽象的なので、表記と現実粒子との対応が分かりにくいかもしれない。そこで具体的な対応例を幾つか示そう。これらは修正した本論文のものである。

まず、基本因子 $\{v, l, q, q, q\}$ のそれぞれに左右価、電価、弱価、色価を割り当てる。色は、因子 q として \bar{d}_L を割り当てた関係で、 (r, g, b) の双対として $(1, 2, 3) = (\bar{r}, \bar{g}, \bar{b})$ の添え字がついた 2 次元色価ベクトル $c_i (i=1,2,3)$ を採用する。しかしこれは三原色の三角形に従って対称で、かつ他の荷価との混合もなく独立なので、必要がない限り省略する。位相因子の \pm も本質的ではないので省く場合がある。基本因子 $\{v, l, q_i (i=1,2,3)\}$ への（左右価,電価,弱価,色価）の割り当ては、計算し易いように単純化する^(註2)。すなわち順に $\{(1, 0, 1, 0), (1, -1, -1, 0), (1, 1/3, 0, c_i (i=1,2,3))\}$ とする。すると世代を同一視した素粒子から、外積代数の基底が唯一決まり、各粒子の荷価（チャージ）はそれを構成する因子の総和になる。

（例 1、左巻き電子） 左巻き電子は基本因子である。 $e_L^- = l$

（例 2、右巻き電子） 左右作用素 T_ν を作用させてつくる。 $e_R^- = v \wedge l$

（例 3、右巻き反電子） 右巻き反電子は左巻き電子のホッジ双対なので $\bar{e}_R^+ = \bar{l} = v \wedge q \wedge q \wedge q$ 。因子数は偶数だから右巻き、電荷は $\frac{1}{3} \times 3 = 1$ 、弱価は 1、色価は 0

（例 4、左巻きダウン） この模型での基礎因子 q は「左巻き反ダウン」である。その双対は右巻きダウンであり、それに左右作用素 T_ν を作用させてつくる。よって、 $d_L = l \wedge q \wedge q$ となる。

逆に、外積の基底から元が唯一求められる。

（例 5、 $q \wedge q$ ） これは、弱価は 0 なので弱い相互作用で不活性、電荷が $+2/3$ 、因子数は偶数なので右巻。よって、右巻きアップ・クォークである。

（例 6、 $l \wedge q \wedge q \wedge q$ ） これは弱価が -1 、電荷が $-1 + \frac{1}{3} \times 3 = 0$ 、因子数が偶数なので右巻。よって右巻き反ニュートリノである。

外積模型の特徴の一つは、ニュートリノ因子 ν の有無によって、左巻きと右巻きが変わることである。右左を変化させる作用素は T_ν である。つまり、この因子 ν は特別な役割を果たしている。

（例 7、アップ・クォークの左右） 右（巻き）アップ（クォーク）の弱い相互作用をせず、

電荷は $+\frac{2}{3}$ なので、 $u_R = q \wedge q$ である。左アップは $u_L = T_\nu u_R = \nu \wedge q \wedge q$ 。弱い相互作用は二つの因子 l, ν を入れ替える作用素 $B_{l,\nu}$ なので、右アップには作用せず、左アップへは作用し、 $B_{l,\nu} u_L = B_{l,\nu} (\nu \wedge q \wedge q) = l \wedge q \wedge q = d_L$ と (例4) の左ダウンになる。

以降の章で、さらに一つの元 ξ を加えた六元模型を示し、それを基本にして種々の考察をする。しかし、以下の議論の多くは「五元模型の拡張」でも成り立つ。その場合、六番目の元 ξ を抜いたものになり、より節約的であるが、模型の自由度は減る。

2. 六元外積模型

(1) 世代を表す因子 ξ

五元外積模型は SU(5) 模型の別表現ともいえるが、これでは世代 (あるいは族) を表していない。そこで、五元外積模型に加えて、世代を表すための新しい不毛な因子 ξ を加えた模型の一例をこの論文で示そう。基礎構成因子は、

$$(l, \nu, q, q, q, \xi) \tag{2.1.1}$$

とし、生成される元の数は五元模型の二倍の $2^6 = 64$ になる。

一方、素粒子の世代は三つあるので、数が合っていない。その解決として前編 (蔵&蔵, 2014) の二つの案のうち、第二案「本質的な世代は二世世代しかなく、残る一世代は不活 (sterile) 元を加えて混ぜ合わせる」を採用する。ここにおいて、「世代」を区別する直接的な作用素などはなく、質量から間接的に粒子像を構成しているに過ぎないことは本質的である (註3)。不毛元を混ぜ合わせて等量にすることは、クォークや電子系の三つの世代が、質量を除いてそっくり同じに見えることを直ちに説明する。種々のチャージが分数になるが、それはクォークの分数電荷を導入したのと、全く同じ方法で「再分数化」する。つまり、各因子 (l, ν, q) の電価、色価、弱価は標準理論及び SU(5) 模型の 1.5 倍 (五元模型の拡張では 3 倍) とする。

この案には顕著な長所がある。それは、アップ族とダウン族、電子族とニュートリノ族において (複素) 混合比を変えることによって、弱い相互作用で世代軸が傾いて対応させることができる点である。また、混ぜる不活元もクォークとレプトンで異なるものも選べる。

ホッジ双対は余因子の積で生成されるが、単純な余因子ではなくて、全因子数 n 、因子数 k とすると、 $(-1)^{k(n-k)}$ の係数が付く。つまり物質と反物質との対応が因子数によって変わる場合がある。

五元模型の拡張では、実質世代は一世代のみで $2^5 = 32$ 種類しかないなので、それに二種類の不活元を混ぜて、三世代を作ることになる。ホッジ双対に符号の変化はない。

（2）基本的な関係

具体的な模型を作る前に、基礎的な関係を押さえておこう。

電価、色価、弱価をもたない「不毛な (sterile)」元は四つあり、 $\{1, \xi, \bar{\xi}, \bar{1}\}$ である。これらの混合も不毛元である。これらは不毛なので、知られている方法では区別できず、現在の真空の変種、または真空の状態の見えざる自由度と考えることにする。不毛元の混合から直交する二つの不毛元 x_{lpt}, x_{qrk} を作ることにするが、ここに模型の自由度が存在することに留意しておこう。

一方、電価と色価を持たないが、弱い相互作用をする元は、 $\nu, \nu \wedge \xi, \bar{\nu}, \overline{\nu \wedge \xi}$ である。

六元模型では総構成因子数が偶数になったため、五元模型の表 (1.1.1) に見られる構成因子数と左右の単純な対応が崩れる。そこで左右価に不平等性を導入する。 $\{l, \nu, q, q, q\}$ には1を、 ξ には暫定的に0を割り当てる^(註4)。そして左右価の合計が奇数なら「左」、偶数なら「右」を割り当てる。不毛元 $\bar{\xi}, 1, \bar{1}$ にも左右価0を割り当てたいところだが、今はきめず、とりあえず「不定」とする。

前編 1.5 節で指摘したように、この模型では右巻きと左巻きの混合には ν 因子を上げ下げする作用素 $T_{RL} \equiv T_\nu = a_\nu + a_\nu^\dagger$ が対応している。新因子 ξ に対しても同じであり、

$$\xi \Leftrightarrow \nu \wedge \xi, \quad \bar{\xi} \Leftrightarrow \overline{\nu \wedge \xi} \quad (2.2.1)$$

が、とりあえずの左右対応となる。左側 ξ が弱い相互作用で不活であり、両者は反対巻きである。(2.2.1) の \Leftrightarrow の右側が弱い相互作用で反応するので、こちらがニュートリノ類である。これに対応するニュートリノを $\nu_{2L} = \nu \wedge \xi$ とすると、反粒子は $\overline{\nu_{2R}} = \overline{\nu \wedge \xi}$ となる。

すると、ニュートリノ族は二世代分だけ決まり、 $\nu, \nu \wedge \xi$ になる。これに不毛元 x_{lep} を混ぜて三世代を構成する。つまり、 $\nu, \nu \wedge \xi, x_{lep}$ がニュートリノの三世代である。最初の二つは弱価をもっており、残りは完全不活性である（五元模型の拡張では、 $\nu, 1, \bar{1}$ が三世代になる）。

五元外積模型の基本世代を f と書くと、他のフェルミオンについても $f, f \wedge \xi, x_f$ を割り当てる。 x_f は f に依存する不活元であるが、弱い相互作用と左右対応の束縛があるので、実質的に二つしか自由度がない。

（3）レプトンの弱い相互作用と混合角

次に弱い相互作用における混合角の由来を考察する。弱い相互作用においてレプトン部分の世代間の混合は、クォーク部分に比べて遥かに大角度混合になっている。これは、「基本的な世代は共通に決まっているが、何か相互作用する補正項がはいて微妙にずれる」という単純な考えとは相入れないことを、まず指摘しておこう。

前編（蔵&蔵, 2014）で述べたように、弱い相互作用においてレプトンを混合する PMNS 行列は、三二最大混合 (tribimaximal mixture) の行列 M_{tbm} （以後、「三二角行列」と略記する）に近い^(註5)。 η, σ, π をニュートリノの固有質量状態の添字とすると、小出のレプトン公式

(1983)のピタゴラスの定理型への変形(前論文(2.1.3-7))の添え字と同一視することができて、

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = M_{tbm} \begin{pmatrix} \nu_\eta \\ \nu_\sigma \\ \nu_\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\eta \\ \nu_\sigma \\ \nu_\pi \end{pmatrix} \quad (2.3.1)$$

となる。左がニュートリノの電子族に対応する状態で、右が固有質量状態である。電子族の場合は、弱い相互作用は $B_{\nu,l} : \nu \rightarrow l$ なので、書き換え $\nu \rightarrow l$ を行えば良い。

この三二角行列 M_{tbm} の表示は対角要素が最大の正值になるようにしてあり、複素位相等に任意性がある。一般型は (5) 節で述べる。この行列の最も重要な性質は、上下の二つの同じ量と、それらとは異なる一つの量が真ん中に並んでいるベクトルがあれば、それらを混合して (L_2 ノルムで) 「等量」にする機能である。ニュートリノは弱い相互作用以外では不活性であり、対となる電子族レプトンとの相互作用を通じてしか観察できない。よって世代も当初は、電子族に対応して命名された。(2.3.1) の左辺がそれである。しかし、固有質量による粒子像は異なった基底の右辺のベクトルになる。

ニュートリノの三代 $\nu, \nu \wedge \xi, x_{lep}$ のうち、最初の二つは弱価をもっており、最後の元は完全不活性である。すると真ん中の ν_σ が不毛元 x_{lep} になる。さらに後の節 (5) で解説する自由度を無視すると暫定的に $\nu_\eta = \nu, \nu_\pi = \nu \wedge \xi$ とおける。これに対応する電子族レプトンは、1章の (2) 節で導入した作用素 (1.2.1)、 $B_{l,\nu}$ を作用させると、不毛元 x_{lep} は変化しないので、

$$\begin{pmatrix} \nu_\eta = \nu \\ \nu_\sigma = x_{lep} \\ \nu_\pi = \nu \wedge \xi \end{pmatrix} \xrightarrow{B_{l,\nu}} \begin{pmatrix} l_\eta = l \\ l_\sigma = x_{lep} \\ l_\pi = l \wedge \xi \end{pmatrix} \quad (2.3.2)$$

となる。上下の二つの電荷と弱価は同じであり、色価はすべて同じである。現実の粒子は、これらの混合になる。ここで簡単のため暫定的に $x_{lep} = \xi$ とおく。さらに後の (5) 節に述べる自由度を除くと、(2.3.1) から次のような形になる。

$$\begin{pmatrix} e = \frac{2l}{\sqrt{6}} + \frac{\xi}{\sqrt{3}} \\ \mu = \frac{-l}{\sqrt{6}} + \frac{\xi}{\sqrt{3}} - \frac{l \wedge \xi}{\sqrt{2}} \\ \tau = \frac{-l}{\sqrt{6}} + \frac{\xi}{\sqrt{3}} + \frac{l \wedge \xi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_\eta = l \\ l_\sigma = \xi \\ l_\pi = l \wedge \xi \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

小出のレプトン公式の変形である前編 (2.1.5) を再記すると、 $\nu_\eta^2 + \nu_\pi^2 = \nu_\sigma^2$ である。各添え

字 η, σ, π に対応する状態を仮定すると、定義より添え字 i に対して $m(l_i) = v_i^2$ なので、 $m(l) + m(\xi \wedge l) = m(\xi)$ となる。5桁の精度を持つ小出の公式の由来は不明ではあるが、こうしてみると三二角行列と何らかの関係がある可能性がありうる。

五元模型の拡張では、上下の二つが不毛元であり、真ん中が実質元とすることになるので、 $m(1) + m(\bar{1}) = m(l)$ となる。

（４）電荷等分混合の意味

三二角行列の電荷等分が、現実の何を意味しているのか推測してみよう。宇宙の創世期には、 τ が容易に生成されるほど十分に温度が高く、レプトン三種類は同じような割合で存在した状態があったはずである。さらに遡って温度が上がれば、クォーク類6種も同じような割合で宇宙に存在した。電荷の自己エネルギーが無限大になる問題は棚晒しになっているけれども、近似的に考えると電荷を同じ半径に集めるときに必要なエネルギーは、集める電荷量の二乗に比例する。つまり、電荷を少数の粒子に集めるより、複数の粒子に分散させた方が総エネルギーは小さくなる。電価軸と電磁力が発生するときに「電荷を等分して分散させる真空状態」が、「ニュートリノの対応のまま電荷を保つ真空状態」より安定であろう。ぴったり等分になるには、モノポールなどの存在、あるいは左右価との対応（註4参照）による量子化（離散化）も関係しているのかもしれない。

それに対して、ニュートリノの弱い力は典型的な短距離力なので、このようなことにならず、粒子像が原初の微細質量のままに残ったとすれば良い。とはいえこの具体的な機構は課題である。

（５）三二角行列の構造と標準形

クォークについて考える前に、真ん中の一つの量と上下の二つの同じ量を混ぜ合わせる複素三二角行列全体の集合を $\mathcal{M}_{\text{tbm}} (\subset U(3))$ とし、その構造を考えておく。対角行列で、対角要素の絶対値が1である行列 (Unitary & Diagonal Matrix) の群を \mathcal{L} とおいて、 $A_i \in \mathcal{L} (i = 0, 1, \dots)$ と書くことにしよう。この形の行列は以後、常用する。 \mathcal{M}_{tbm} には実7次元の自由度があり、一つの標準形は次の通りである。 $M \in \mathcal{M}_{\text{tbm}}$

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \quad (2.5.1)$$

ここで、 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in SU(2)$, $|\lambda_i| = 1 (i = 1, 2, 3)$.

左端の行列 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Lambda_1$ と置いて、 A' を二二行列 A の中央に 1 を加えて三三行列に拡大した行列とすると (2.5.1) は、

$$M = \Lambda_1 M_{t\bar{b}m} A' \tag{2.5.2}$$

ということである。

各種類の素粒子についての位相の取り方は、(特殊な相関がなければ) 典型的に宇宙の内部観察者には知りえない自由度の例であり、したがって原則として式 (2.5.2) に加えて、その左右に出入力の位相を表す対角行列 Λ_0, Λ_2 が入る。よって重複する左側の自由度を潰すと、

$$G = \Lambda_0 \Lambda_1 M_{t\bar{b}m} A' \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_6 \end{pmatrix} \tag{2.5.1}$$

ここで、 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \text{SU}(2)$, $|\lambda_i| = 1 (i = 1, \dots, 6)$. 左右の入出力の見えない位相の自由度を除くと、レプトンの弱い相互作用の自由度はSU(2)に入るAのみになる。しかし、次節のクォーク部分の (2.6.2) のように二つ G_1, G_2 をとり、 $G_1 G_2^{-1}$ と組み合わせると、一次元U(1)だけ余分な影響がでてくるのである。

(6) クォークの弱い相互作用と混合角

次にクォークと弱い相互作用について考えよう。その前に、弱い相互作用でクォークとレプトンは移り変わらないので、クォークとレプトンの世代は質量の低い順で対応しているとは限らないことを指摘しておく。

電荷混合前の原初の世代については、クォークの間にも外積構造から拘束された根本対応がある。それを $(u_1, u_2, u_3), (d_1, d_2, d_3)$ と書こう。それは以下の対応になる。

$$\begin{pmatrix} u_1 = l \wedge q \\ u_2 = x_{qur} \\ u_3 = l \wedge q \wedge \xi \end{pmatrix} \xleftrightarrow{B_{l,v}} \begin{pmatrix} d_1 = v \wedge q \\ d_2 = x_{qur} \\ d_3 = v \wedge q \wedge \xi \end{pmatrix} \tag{2.6.1}$$

x_{qur} は不活元である。これには自由度があり、 $x_{qur} \neq x_{lep}$ と取れる。それについては次節 (7) で取り扱う。

これらが電子族と同じように混合されて現実の粒子に見えるとする。しかしながらこれには、三二角行列の複素位相と二元混合を含めた自由度があり、これはアップ族とダウン族で別々に取れる。それを G_u, G_d とすると、

$$G_u^{-1} \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \overset{W}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = G_d^{-1} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (2.6.2)$$

になる。つまり $G_u G_d^{-1}$ が CKM 行列ということになる。もし $G_u \cong G_d$ なら、これは対角行列に近くなる (完全に $G_u = G_d$ なら単位行列になる)。

一方レプトンにおいて相当する行列は一つの三二角行列 $G_e (\in \mathcal{M}_{tbm})$ である。つまり、この模型ではレプトンとクォークの混合行列の構造が全く違っており、なぜクォーク混合を表す CKM 行列は対角型に近く、レプトン混合を表す PNMS 行列は大角度混合なのかを説明する。そして G_u, G_d の主な違いは、二つの等しい電荷元の混合に由来する $SU(2) \times U(1) (= U(2))$ の部分である。この部分が概ね軽いクォーク $(u, c), (d, s)$ の混合に相当すると考えると、この混合が他の部分より大きいことは自然に理解できる。

この自由度を詳しく検討しよう。三二角行列の集合 \mathcal{M}_{tbm} から二つ G_1, G_2 をとり、 $G_1 G_2^{-1}$ と組み合わせると、

$$G_1 G_2^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} M_{tbm} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & \lambda_7 & 0 \\ a_3 & 0 & a_4 \end{pmatrix} M_{tbm}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_6 \end{pmatrix} \quad (2.6.3)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in SU(2), \quad |\lambda_i| = 1 (i = 1, \dots, 7)$$

$A \in SU(2)$ なので λ_7 を外すことはできず、レプトン対応の (2.5.1) に比べて、一次元 $U(1)$ の自由度が生じる。余分な自由度は、上下と別の量を持つ中央の要素の、複素角が消せなくなることによる。つまりクォーク部の弱い相互作用では、有効近似として「世代間の水平対称性」が群 $SU(2) \times U(1)$ と見なしえる。

この対称性は比較的簡単なものなので、過去に様々な模型で導入されてきた。とりわけ小西ら (Sogami & Konishi, 2008; 小西 & 曾我見, 2010; Konishi & Sogami, 2010; Sogami, 2010; 小西康文, 2011) は、この群を世代の水平対称性として仮定すれば、標準理論のパラメーター、たとえばクォークの質量の概算値を大幅に減らすことができるといっている。

外積構造は各点での内部空間であり、その混合は外積構造より後に生成された自由度であり、各点で別々に取れる。しかし、大域でバラバラになると粒子像そのものが破綻する。これはゲージ群の一種であり、4つの自由度はヒッグス場の候補である。

実質的に観察できるのは (2.6.3) のもっとも右左の位相行列を除いたものなので、自由度を計算すると CKM 行列は、 $c_i = a_i / \lambda_7 (i = 1 \dots 4)$ として、

$$\begin{aligned}
 M_{CKM} &= M_{tbm} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & \lambda_7 & 0 \\ a_3 & 0 & a_4 \end{pmatrix} M_{tbm}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & \lambda_7 & 0 \\ a_3 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\lambda_7}{6} \begin{pmatrix} 4c_1 + 2 & -2c_1 - 2\sqrt{3}c_2 + 2 & -2c_1 + 2\sqrt{3}c_2 + 2 \\ -2c_1 + 2 - 2\sqrt{3}c_3 & c_1 + \sqrt{3}c_2 + 2 + \sqrt{3}c_3 + 3c_4 & c_1 - \sqrt{3}c_2 + 2 - \sqrt{3}c_3 - 3c_4 \\ -2c_1 + 2 + 2\sqrt{3}c_3 & c_1 + \sqrt{3}c_2 + 2 - \sqrt{3}c_3 - 3c_4 & c_1 - \sqrt{3}c_2 + 2 + \sqrt{3}c_3 + 3c_4 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

この式は、(転置+ $c_2 \Leftrightarrow c_3$) に対して対称である。また $A = E$ 、つまり $c_1 = c_4 = 1, c_2 = c_3 = 0$ とすると、(2.6.4) は自明な $\lambda_7 E$ になる。少し複雑にして、 $c_2 = c_3 = 0, c_1 = 1$ とすると、

$$M_{CKM} = \frac{\lambda_7}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + c_4 & 1 - c_4 \\ 0 & 1 - c_4 & 1 + c_4 \end{pmatrix}, \quad |c_4| = 1. \tag{2.6.5}$$

これは位相因子を省いた表示なので、各要素を回転してすべてが実数化できる。さらに c_4 を変数として単射である。

$$S^1 \hookrightarrow \text{SU}(2) : c_4 \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + c_4 & 1 - c_4 \\ 1 - c_4 & 1 + c_4 \end{pmatrix}. \tag{2.6.6}$$

この2-3要素 $1 - c_4$ がカピボ角、つまり $|1 - c_4| = \sin(\theta_c)$ なら、(2.3.3) と比較すると、あくまでこのパラメーターに限っては、 e と t, b の構造が近く、これらが粗い「同一世代」をなすことになる。このように、この行列には十分な自由度がある。さらなる検討は後編で論じる (註6)。

(7) 核子崩壊の阻害条件

クォークとレプトンを混ぜ合わせる x_f には自由度があり、同じである必要性はない。とりわけ直交する、 $x_{qu} \perp \overline{x_{lep}}$ の場合が興味深い。なぜなら、不毛元は核子崩壊を引き起こす X, Y ボソン ($B_{l,q}, B_{\nu,q}$ に相当) に対しても不活性であり、この相違が障害になって核子崩壊が妨げられるからである。とりわけ、全体を直交に取ることができれば、 X, Y ボソンの質量が0であっても核子崩壊が著しく減少する。この節では、複合粒子への計算をかねて、これを簡単に考察する。

陽子 p 、中性子 n のような粒子の複合系は、集合を表す $\{ \}$ で括弧にすることにする。色は前述のように添え字 $(1,2,3) = (\bar{r}, \bar{g}, \bar{b})$ とすると、陽子崩壊の簡単な一例は

$$p = \{u_r, u_g, d_b\} \xrightarrow{X_3} \{\bar{u}_2, u_g, e^+\} \quad (2.7.1)$$

である。 X ボソンによって (2.7.1) 左項の第一と第三のクォークが反アップ・クォークと陽電子に変化して、崩壊が起こる。

まずこれを $SU(5)$ と同等の五元外積模型で考えてみよう。この反応には左右性は関係がないので、 ν 因子を省くことにする(要するに四元模型に縮小するのだが、五元模型でも左端に ν 因子がある場合は右端に持ってきて、反応後に左端に戻せば符号は全く変わらない)。 X ボソンに相当する作用素は B_{l,q_i} ($i = 1, 2, 3$) である。すると

$$\{u_r, d_b\} = \{q_2 \wedge q_3, l \wedge q_1 \wedge q_2\} \quad (2.7.2)$$

であり、 $X_3 = B_{l,q_3}$ が結合可能である。

$$\begin{aligned} \{u_r, d_b\} &\xrightarrow{X_3} \{B_{l,q_3}(q_2 \wedge q_3), -B_{q_3,l}(l \wedge q_1 \wedge q_2)\} \\ &= \{-l \wedge q_2, -q_1 \wedge q_2 \wedge q_3\} \\ &= \{-\bar{u}_2, -e^+\} \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

となる。作用素の定義より、一方にマイナスが付く。

一方、世代を区別する六元模型において (2.7.2) に従うと、左巻青ダウン・クォーク d_b は、三二角行列の一種である G_d の最上行を $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ として、真中の項の不毛元は変わらないので、

$$d_b = \alpha_1 l \wedge q_1 \wedge q_2 + \alpha_2 x_{qur} + \alpha_3 l \wedge q_1 \wedge q_2 \wedge \xi \quad (2.7.4)$$

になり、右巻きはこれに ν 因子を左端に加えたものになる。 X ボソンの作用後は (2.7.3) より、

$$B_{l,q_3}(d_b) = -\alpha_1 q_1 \wedge q_2 \wedge q_3 + \alpha_2 x_{qur} - \alpha_3 q_1 \wedge q_2 \wedge q_3 \wedge \xi \quad (2.7.5)$$

一方、六元模型において右巻陽電子 e^+ は、これと異なる。 G_l の最上行を $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ として、

$$e^+ = \beta_1 q_1 \wedge q_2 \wedge q_3 + \beta_2 \bar{x}_{lep} + \beta_3 q_1 \wedge q_2 \wedge q_3 \wedge \xi \quad (2.7.6)$$

$x_{qur} \perp \bar{x}_{lep}$ なので、直交条件は、 $\alpha_1 \bar{\beta}_1 + \alpha_3 \bar{\beta}_3 = 0$ である。もし直交すると、このような単純な経路を通じた陽子崩壊は制約される。

このように、六元外積模型では五元模型や、SU(5) 及びその単純な拡大などと異なり、核子が崩壊しない場合が起こりえる。この核子の崩壊を禁止する条件を仮定すると、いくつかの拘束式が生じ、模型の自由度を制限することになる。とりわけ、三桁と五桁の精度を示す二つの小出のカビボ角の公式 (Koide, 1981) とレプトン質量の公式 (Koide, 1981, 1983) の間には、入れ替え対称 ($\nu_e \Leftrightarrow \nu_\tau$) に相当する部分があるが (蔵&蔵; 2014, 式 (2.1.3-8))、これはこのような何かの直交条件と見なせる可能性がある。これらについても後編で論じる。

3. 後編への方針 (帰納的研究の重要性)

物理の目的というものは、小数点つきのある数、などを見つけ出すことである。さもなければ、何もやったことにはならない。

リチャード・ファインマン [1961] (註7)

本論文では、五元外積模型の現実の粒子への対応の訂正と、六元外積模型の概要と、その一つの例を示した。六元外積空間と作用素に、現実の素粒子やその変化を当てはめるやり方は、これ以外にもいくつかの可能性があり、妥当性や有効性の検討が必要である。また、六元外積構造のみでは単純すぎて、実際に観察される標準理論の多くのパラメーターを導出する十分な束縛がない。何か別の大小原理群が必要である。

ここで科学史上、メンデレーエフの周期律表の考案 (1869) の事例を思い返すべきであろう。これは、知られていた現象論的な部分規則を張り合わせて、かつ足りない部分を推理して出来上がったものである。決して量子力学的な原子理論といった「大理論」が完成した後で、天下りの・演繹的に導出されたのではない。

素粒子の構造や標準理論のパラメーターに関する理論も、こちらの方向が有望であろう。小出 (1981, 1983) の公式、角野 (2009) の公式、Wolfenstein (1979)、小西ら (2010) のように部分的な規則の「候補」をより多く見つけることが重要である。それが十分に数多く見つければ、自然に「素粒子の周期律表」と、その意味する新たな力学や「大理論」も見つかると思われる (註8)。

後編では、六元外積模型に基づいて、あるいは矛盾しない形で、このような発見的な規則の候補と、その由来を考察していく。

註

(註1) SU(5) 模型の最大の欠点とされる核子の崩壊が観察されていないことについては、ほとんどの実験で考慮されていない「量子ゼノン効果」の影響が考えられる(蔵&蔵, 2013)。しかし、もう一つの有力候補は、本論文3章で述べるように、クォークとレプトンで異なった不活元が混合されることによる変換の障害である。

(註2) 頂点単体に作用する外積モデルから厳密に言えば、各因子の各荷価の数値を、単体の辺や中心との距離で割った値が、ベクトルの正規化条件として入るのが自然である。これらは各荷価の根本的な由来や割合を考えると時には必要かもしれないが、複雑になるので省く。

(註3) このように混ぜて生成すると、すべての粒子を生成するのに十分な次元が足りず、一部が独立ではなくなる。しかし、この非独立性の問題は、外積代数の基底がすべて観察可能であることを暗に仮定している。だが、我々のいる世界では、不毛元を区別することはできない、ニュートリノは容易に観察しがたい、また重い粒子も安定的に用意できない等という理由から、一部の基底に射影する観察作用素が存在しづらく、有効的な粒子の次元が、基本の次元を超えて見えることがあり得る。ただし、高エネルギーかつ複雑なダイアグラムで一部が縮退して非独立性を示すアノマリーがあり得る。

(註4) 左右価の割り当ては、大変に難しい問題である。他と同じように ξ に左右価1を割り当てるとうまく行かず、何か犠牲がいる。

例を考えてみよう。 $R = 0, L = 1$ とする。左右作用素は必ず1変化させ、以下の反ダウン q に作用させた例のように、左右性を変える。{}内は左右価。

$$\begin{Bmatrix} R \\ R \\ L \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \xi \\ q \wedge \xi \end{pmatrix} \xrightarrow{RL} \begin{pmatrix} T_\nu q \\ T_\nu \xi \\ T_\nu(q \wedge \xi) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L \\ L \\ R \end{Bmatrix} \quad (4.4.1)$$

そして、弱い相互作用は、必ず片側に作用する。よって、ニュートリノ三種の対応は、

$$\begin{Bmatrix} L \\ L \\ R \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ \xi \\ \nu \wedge \xi \end{pmatrix} \xrightarrow{RL} \begin{pmatrix} 1 \\ \nu \wedge \xi \\ \xi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} R \\ R \\ L \end{Bmatrix} \quad (4.4.2)$$

と複雑な変化をする。このように簡単な割り当てでは、ニュートリノの一種が右巻きになり、角運動量保存則が壊れかねない。シーソー機構のようにニュートリノの質量生成だけを左右振動作用素 T_ν の例外になっていることはありえる。この場合、不毛な(sterile)ニュートリノのような余分なものが必要になる。これらの問題は、質量について考察した後編で、改めて考察したい。五元模型の拡張では $1, \bar{1}$ の割り当て等に似た問題が発生する。本論文では、暫定的に ν, ξ とその複合は単純な左右性の例外とする。

(註5) レプトン混合が三二角行列であるということ、最初に示唆した研究者は Wolfenstein (Phys. Rev. D 18 (1978), p. 958) らしい。

(註6) 核子崩壊が起こらないという条件と、小出 (Koide, 1981) のカビボ角 θ_c の推論

$$\tan(\theta_c) = \frac{v_x}{v_y} = \frac{v_\mu - v_e}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{6}}{2v_\tau - v_\mu - v_e} \cong 0.22 \dots \quad (\text{蔵\&蔵 [2014], 2.1.8)}$$

と何か関係があるのだろうか。一種の相殺条件と見なせないだろうか。

(註7) 『ファインマン・レクチャー 素粒子の物理学』丸善 (1992[1961]), p. 87

(註8) もちろんその結果、ここ数十年間、研究されてきた大理論の一つが正しいことが分かるかもしれない。本論文で述べてきた仮説や提案も、必ずしもそれらと論理的に排他的な関係にあるとは言えない。この外積モデルも究極のものではなく、暫定的で有効なものに過ぎない。たとえば、なぜ「六」元なのかというのは説明できない。うまくやればカラビ・ヤウ多様体の理論等に帰着できるかもしれないし、ローレンツ群の次元に由来するのかもしれない。

引用文献

- ファインマン, R.P. (1992 [1961]). 『ファインマン・レクチャー 素粒子の物理学』丸善.
- Georgi, H. & S.L. Glashow (1974) “Unity of all elementary-particle forces”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 32, pp. 438-441.
- Koide, Y. (1981) “New formula for the Cabibbo angle and composite quarks and leptons”, *Phys. Rev. Lett.* vol.47, pp.1241-1243.
- (1982) “Fermion-boson two-body model of quarks and leptons and Cabibbo mixing”, *Lett. Nuovo Cimento.* vol.34, pp.201-205.
- (1983) “New view of quark and lepton mass hierarchy”, *Phys. Rev. D*, vol.28, pp.252-254.
- Konishi, Y. & I. S. Sogami (2010) “Dirac mass matrices in gauge field theory of horizontal symmetry”, *Prog. Theor. Phys.* vol.123, pp.271-283.
- 小西康文 (2011) 「SU(2) × U(1) 水平対称性に基づくディラック型のクォーク質量行列に関する考察」京都産業大学論集（自然科学系列）vol.40, p.13-22.
- 蔵琢也&蔵研也 (2013) 「量子ゼノン効果とその影響」*Review of Economics and Information Studies*, vol.14, pp.15-34.
- (2014) 「素粒子の六元外積模型（前編）」*Review of Economics and Information Studies*, vol.15, pp.33-48.
- Sogami, I. S. (2010) “Gauge field theory of horizontal symmetry generated by a central extension of the Pauli algebra”, *Prog. Theor. Phys.*, vol.122, pp.807-827
- 曾我見郁夫&小西康文 (2010) 「標準模型を超えるための一つの試みー水平対称性と質量行列」数理解析研究所講究録 vol.1705, pp.217-224.
- Sogami, I. S., & Y.Konishi (2008) “Notes on flavor mixing matrices. characterized by SU(2) × U(1) group parameters”, *Prog. Theor. Phys.* vol.119, pp.339-344.
- Sumino, Y. (2009) “Family gauge symmetry and Koide’s mass formula”, *Phys. Lett. B* vol.671, pp. 477-480.
- Wolfenstein, L. (1978) “Oscillations among three neutrino types and CP violation”, *Phys. Rev. D* vol.18, pp.958-960.