素粒子の六元外積模型（前編）

蔵　　琢也[1]　　　蔵　　研也

Abstract（概要）SU(5) 大統一理論の類似として、五次元単体の頂点と、それから生成される五元外積による簡便な表現を示し、それに合う形でのSU(5) の捻じれた修正理論を提示する。この模型ではホッジ双対が反粒子に対応する。これはSU(5) と一部の粒子のヘリシティが捻じれた関係にあるが、より構造が明示された形式である。また角運動量異常を予想する。つづいて、小島のレプトン質量等式など、既存の理論によって説明しがたい変数の関係を紹介し、解説する。さらに、五元外積を六元外積にする方針を示す。

1．五元外積模型

1．1　SU(5) と五頂点単体

最小の大統一模型SU(5) は、Georgi & Glashow (1974) によって示された簡単で美しい理論である。その長所は無駄な粒子が少なく、コンパクトにまとまっているという特徴を持つ。しかしながら、この模型の数少ない未発見の粒子による核子の崩壊時間の予言に失敗し (Super-Kamiokande Collaboration, 2009)、そのままでは成り立たないことが明らかになった (蔵&蔵, 2013も参照)

通常、このようなゲージ理論の模型は群の一般表現論を使って計算される。それは構造のないベクトル空間と、それに作用する行列の性質である。この表現論はどんな奇妙な群、例えば大きなリー群 E_6 や E_8、あるいは特異的な巨大有限単純群 F_{24}、B、M 等にも適応できるように、一般的な形で作られている。もちろん、このような巨大で複雑な群と多くの未発見粒子を伴う模型も数多く作られてきたが、本論文では大きな代償を払っても、逆になるべく少ない要素で多くのことを説明する方針で模型を作る。

とりわけ、SOやSU等のような群には簡潔な別表現が存在する場合があり、それは回転系の群に特化した対価として、汎用の表現論より多くの構造を明快に表している可能性を持つ。本論文で示すのはその一つであり、単体の頂点（正確にはその二冪被覆）に群を作用させることによって、外積形式で表現する。なお、本論文では1.3節で明らかになるが、場の理論の公理を天下り式に採用しないし、必ずしも物理の標準的な記法も採用しない。

1　淑徳大学総合福祉学部　260－8701　千葉市中央区大厳寺町200

まず、基本的な対応を示す。５次元空間の各軸の１単位ベクトルにある５つの点 $e_1=(1,0,0,0,0)$, $e_2=(0,1,0,0,0)$,..., $e_5=(0,0,0,0,1)$ を頂点とする超多角形は、四次元５頂点単体 Δ_5なして、これを交換する置換群$\mathfrak{S}_5$がある。これを標準Δ_5と呼ぼう。各単位ベクトルには、原点$0=(0,0,0,0,0)$に対しての対蹠点$-e_1=(-1,0,0,0,0),\ldots,-e_5=(0,0,0,0,-1)$が組になっており、対蹠点との間に偶奇代数といえる位数２の群$\mathbb{Z}_2$が係っている。つまり、

$$e_i = \left(0,\ldots,\overset{\mathrm{i}}{1},0,\ldots\right), \quad -e_i = (0,\ldots,\overset{\mathrm{i}}{-1},0,\ldots) \tag{1.1.1}$$

とおく。この計10の頂点の内の中から５つを取り出してそれが標準Δ_5と同じ体積を保つ変換は、同じ組に属する対蹠点を二つ含まない組み合わせである。

この基底e_iから外積代数を作る。外積代数はテンソル積の代数を交代化して、小さくしたものである。この外積代数の次元は$2^5=32$ である。これは

$$1,\quad e_1,\quad e_1\wedge e_2,\quad e_1\wedge e_2\wedge e_3,\quad e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4,\quad e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4\wedge e_5$$

というような形の32の基底からなる。外積代数は交代性以外、基底の順序や混ぜ合わせに頑健である。

特殊ユニタリー群SU(5)は、Δ_5の置換群$\mathfrak{S}_5$の被覆を離散部分群として自然に含む。そこで、この各頂点に基礎因子となる素粒子の片方のヘリシティを割り当てることにする。暫定的に、

$$(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) = (\nu,\ e_L^-,\ \overline{d^R}_R,\ \overline{d^G}_R,\ \overline{d^B}_R) = (\nu,\ l,\ q,\ q,\ q) \tag{1.1.2}$$

とする。この並びの順序は本質ではないし、これらの反粒子$(\bar{\nu},\ e_R^+,\ {d^R}_L,\ {d^G}_L,\ {d^B}_L)$を割り当てても、ほぼ同じ理論になる。この細かい割り当ての妥当性は後に考察する。最後の項は略記法である。添え字を省き記述を単純にするために、電子系列のレプトン因子の表記としてlを採用する。理由は文字eがありふれた記号であり、また電子、外積代数の基底e_i、自然対数e等との混同をさけるため、さらに電子そのものではないからでもある。同様にニュートリノ因子は単にνであらわす。反ダウンクォーク因子も、外微分記号d等との混同を避けるためqであらわす。クォークの色(R,G,B)には強い対称性があるので、原則として色は省略し、外積に関しても$q^2=q\wedge q,\quad q^3=q\wedge q\wedge q$と略記する。これらは、異なる色の外積なので、３次までしかない。色を区別したいときだけ(R,G,B)を付け加える。

先回りして要約するならば、qは色因子、lは電因子、νは左右因子なのである。さらに外積代数でのホッジ双対は反粒子に対応すると考えるのが自然である。元xのホッジ双対は、数学では$*x$と書くことが多いが、本論文では原則として反物質を意識して$\bar{x}$と上線をつけることにする。

次節1.2では、いきなり外積模型は説明せず、まずは素朴な幾何学である五頂点模型とその長所を説明し、つづいての1.3以降において、その代数化といえる五元外積模型を説明することにする。代数学に熟達した読者は、逆に読むほうが正確に理解可能であろう。

１．２　五頂点模型の利点

まず、五次元空間の５つの単位点に基礎因子を(1.1.2)にしたがって割り当てるのであるが、これは五つの元からなった集合であり、その部分集合族は空集合や全集合を含めて2^5=32個ある。他の素粒子との具体的な対応は1.4節で示すが、一つの部分集合S_λをとり、それに複合系として部分集合S_λの要素のベクトルの総和点s_λを割り当てる。原点0とその総和点s_λを結ぶ直線は、S_λを頂点集合とする単体$\Delta(S_\lambda)$の重心を通るという意味で一対一に対応している。つまり、五頂点単体Δ_5の部分単体の重心は各種の素粒子に対応するのである。

五頂点表現の最初の利点は、クォークの電荷が1/3であることや、原初のワインバーグ角の値などを、一般の表現論を経由する計算より、簡単な仮定で理解できることである。

この五頂点模型においてチャージの括りを考えてみよう。まず反ダウンクォーク$\overline{(d^R, d^G, d^B)}$のなす三頂点が一つの平面上に正三角形$\Delta_3$をなしている。これは三角形の重心から見て、ちょうど色のなす角度であり、色力学に対応する色平面である。そして電子やニュートリノを示す頂点は、この平面への射影が０なので色を持たない。これは電子とニュートリノの頂点を含む直線が、五次元空間で三色のクォークのなす平面と互いに直交しているということである。これは(1.1.1)のようにベクトルとして書けば自明である。この電子とニュートリノのなす直線軸の方向は、弱荷の方向と見なすことができ、直交性はクォークが弱荷を持たないことを示している。この頂点の回転はU(2)になる。

その次に注目すべきなのは、Δ_3に電子を加えたΔ_4を含む３次元超平面である。これは、クォークの色に加えて電荷の軸がなす面であり、四つの頂点は反ダウンクォークと電子による。電荷の軸は、３つの反ダウンクォークのなす三角形Δ_3の中心から、電子の方向に直角に伸びている。この電荷軸は、この四面体Δ_4の重心を基準点０とし電子を－１にとると、色の面は$\frac{1}{3}$であり、これが電子と反ダウンクォークの電荷の比を表している。この超平面に対してニュートリノを表す頂点の射影は０であり、したがってニュートリノは電荷も色も持たない。

この四面体Δ_4にニュートリノを示す頂点を加えて、五次元単体Δ_5が構成される。弱荷の軸は、反ダウンクォークと電子の超平面Δ_4に垂直ではない。前述のように、弱荷の軸は電子とニュートリノを結ぶ直線方向であり、電子を表す点から見れば、そこで電荷の軸と交わっているが直交しておらず、傾いているのである。ワインバーグ角はこのズレである。五次元単体Δ_5の中心（重心）との関係を考えてみよう。

Δ_nの重心と頂点の各距離をd_nとして、一辺を１とするとピタゴラスの定理から順に初等的に計算出来て、（一点０）、線分$d_2=\frac{1}{2}$、三角形 $d_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$、四面体 $d_4=\sqrt{\frac{3}{8}}$、五単体$d_5=\sqrt{\frac{2}{5}}$、六単体 $d_6=\sqrt{\frac{5}{12}}$になる。一般的に$d_{n-1}:d_n=\sqrt{1-\frac{1}{(\mathrm{n}-1)^2}}$ となる。

色の三角形Δ_3の中心から、色と電子の四面体Δ_4の重心を通って電子を結ぶ直線が現在の電荷の軸になっているが、本来はΔ_3の重心から五単体Δ_5の重心を通って、電子とニュートリノの中点を結ぶ軸が本来の軸である。このズレが原初のワインバーグ角になり、少し複雑だが三平方の定理を使って初等的に計算出来て、$\tan\theta_w = \sqrt{\frac{3}{5}}, (\sin^2\theta_{\mathrm{w}} = \frac{3}{8})$となる。もちろん、これは表現論から計算した値 (Georgi & Glashow, 1974) と等しい。知られているゲージボソンに対応するのは頂点と各多面体の中心を結ぶ線分に対応する。とりわけ、ZボソンはνとΔ_5の重心と中心と結ぶ線分l_zに対応していて、Wボソンはeとνの中点と、νを結ぶ線分l_wに対応している。これは先のワインバーグ角をなす三角形と相似形であり、長さについて、 $l_z \cos\theta_w = l_w$になる。本来の質量も同じように$m_z \cos\theta_w = m_w$ 。

この構成において、括りの順番は((色＋電荷) ＋弱荷) になっていることに注目すべきである。後篇で世代を表す電荷を追加するが、弱い相互作用のみが世代の混合を行うことに注意しよう。このことも、弱い相互作用が最も「外側」の対称性であることを意味している。弱い相互作用で対応が傾いている「世代」は、さらに「外側の」性質といえる。

１．３　外積代数、及び生成・消滅作用素と射影作用素

この五頂点模型は初等幾何学的ではあるが、代数としての性質を持っていない。そこで、この単体模型を代数化するために、これらの頂点をなすベクトル空間に外積代数を導入しよう。

外積代数は、同一の線形空間を因子とするテンソル積全体を交代化したもので、一意的である。線形空間が有限次元nの場合は、その外積代数の次元は2^nであり、基底ベクトル$\{e_i\ (i = 1,2,\dots,n)\}$ を任意に一つ決めれば、i番目の因子e_iが入っているかどうかの違いによって2^n個の要素からなる基底が出来上がる。５次元の場合は

$$\{1,\quad e_i,\quad e_i \wedge e_j,\quad e_i \wedge e_j \wedge e_k,\quad e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge\ e_l,\quad e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge\ e_l \wedge e_m\}$$

の形の32個の基底より生成される。これらの基底は、それぞれ五頂点モデルの頂点の部分集合に対応し、$1 \leftrightarrow\ \emptyset$対応を含めて五単体を構成する各単体の重心に１対１で対応している。

さらに外積では結合法則を満たす積も定義される。それは$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$つまり入れ替えると−1倍になる因子の交代関係から生成される積を持つベクトル空間である。これから$e_i^2 = e_i \wedge e_i = -e_i \wedge e_i = 0$になる。また、ある元を構成する因子の集合を「反対」にするホッジ双対という操作も重要である。ホッジ双対は総因子数が奇数と偶数では少し性質が違う。これらの規則は、外積代数を常用する代数学や幾何学の教科書を参照せよ。

このn個の因子から構成される外積代数に、その因子を付けたり消したりする生成作用素a_i、消滅作用素$a_i^\dagger$ と、射影作用素 P_i 、ボソン類似物 $b_{i,j}$を定義し、それらの代数的な性質をまとめよう。

① 外積代数の元xへの作用は、左から作用素を掛けるものとする。つまり作用の対象になる因子を、最も左に持ってくる記述を採用して計算する。

② 因子e_iを上げる（生成）作用素をa_i、下げる（消滅）作用素を$a_i^\dagger$とする。(物理の記法と逆になっているので注意）つまり因子e_iを左側に掛けることを「あげる」、因子e_iを一番左に持ってくる表現を採用して消すことを「下げる」とする。正確に書けば生成作用は、$a_i x = e_i \wedge x$。一方、消滅作用はもし基底に対して $x = e_i \wedge x'$ と書けるなら、 $a_i^\dagger x = x'$。もし書けないのなら、$a_i^\dagger x = 0$とする。

③ すると外積代数への作用から、 $a_i^2 = {a_i^\dagger}^2 = 0$ (冪零)、$a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i = 1$（フェルミオン的正準共役)、$i \neq j$のとき、 $a_i a_j + a_j a_i = a_i^\dagger a_j^\dagger + a_i^\dagger a_j^\dagger =$ $a_j a_i^\dagger + a_i^\dagger a_j = 0$（反可換）が成り立つ。

④ 因子e_iを持つ成分だけを残す作用素を$P_i(= a_i a_i^\dagger)$とすると、因子e_iを持たない成分だけの残す作用素は $\overline{P_i} = 1 - P_i = a_i^\dagger a_i$となる。すると $a_i P_i = 0,\ P_i a_i = a_i,\ a_i^\dagger P_i = a_i^\dagger,\ P_i a_i^\dagger = 0,$ 等が成り立つ。

⑤ 当然、$P_i P_j = P_j P_i$で可換である。また$i \neq j$なら$P_i a_j = a_j P_i,\ P_i a_i^\dagger = a_i^\dagger P_i$ つまり可換。

⑥ $T_i = a_i + a_i^\dagger$とすると、$T_i^2 = 1$ であり、位数２である。⇒$\|T_i\| = 1$

⑦ 因子e_iと因子e_jとを置き換える操作を $b_{i,j} = a_i a_j^\dagger + a_i^\dagger a_j$ とすれば、ゲージボソンの作用素の類似物ができる。$b_{i,j}$ $(i \neq j)$の作用は、$e_j \to e_i \to -e_j \to -e_i \to e_j$であり、位数４である。当然、$\{i,j\} \cup \{k,l\} = \emptyset$ なら、$b_{i,j} b_{k,l} = b_{k,l} b_{i,j}$ になり可換である。また③より$b_{i,i} = 1$。 $i \neq j$ とすると③より $b_{j,i} = -b_{i,j}\ (i \neq j)$ で反対称。$b_{i,j} b_{j,i} = (-b_{j,i})(-b_{i,j}) = b_{i,j} b_{j,i}$で可換。

ただし、$b_{i,j}$をそのままボソンの生成作用素と見なすことはできない。また、複合生成消滅作用素、たとえば、 $A = a_i a_j,\ A^\dagger = a_i^\dagger a_j^\dagger\ (i \neq j)$ の振る舞いは複雑である。因子数が奇数と偶数の基底の関係が、「超対称性」に限定的に似ていることを指摘したい。

1.4　具体的な表現とSU⑸ との対応

特殊ユニタリー群SU(5)は、1.2で述べた単体の頂点族に作用するとみなせる。そこで、５次元ベクトルから生成される外積代数の基本要素と、素粒子のフェルミオンを対応させることにする。外積代数の次元は2^5=32であり、32個の要素になる。

通常用いられる群の表現論における既約分解は、作用する空間の軌道を、直和⊕に分けることである。それに対して外積代数は作用される空間を固定し、交代積を導入して拡張したものである。したがってGeorgi & Glashow (1974) に類似したものとなり、チャージの値は因子の総和になるが、外積に導入によって明示的な付加構造が入る。この見方ではアップクォーク族や素粒子の片方のへリシティは根本因子ではなく、特定の構造を持つことになる。ボソン的相互作用は各因子を入れ替えるとする。すると、すべての元の対応は以下になる。

表 (1. 4. 1)

0次	$\{1\}$	(基底元、第一真空)	小計　1
1次	$\{\nu,\ l,\ q\times 3\}$	(基本因子)	小計　5
2次	$\{\nu\wedge l,\ \nu\wedge q\ \times 3,\ l\wedge q\ \times 3,\ q^2\ \times 3\}$		小計１０
3次	$\{\nu\wedge l\wedge q\ \times 3,\ \nu\wedge q^2\times 3,\ l\wedge q^2\ \times 3,\ q^3\}$		小計１０
4次	$\{\bar{\nu},\bar{l},\ \bar{q}\times 3\}$		小計　5
5次	$\{l\wedge\nu\wedge q^3\}$	(天上元、第二真空)	小計　1
			総計３２

上下二つの真空を抜いて現実の粒子（ν_L, e_L^-, $\overline{d^R}_R$, $\overline{d^G}_R$, $\overline{d^B}_R$） に当てはめると、

表 (1. 4. 2)

1次	$\{\nu_L, e_L^-, \overline{d}_R\times 3\}$
2次	$\{e_R^-, \overline{d}_L\ \times 3, \overline{u}_L\ \times 3,\ u_L\ \times 3\}$
3次	$\{\bar{u}_R\ \times 3,\ u_R\times 3,\ d_R\ \times 3,\ e_L^+\}$
4次	$\{\bar{\nu}_R,\ e_R^+, d_L\times 3\}$

この模型では、弱い相互作用はlとνを入れ替える変換 $b_{\nu,l}$ に相当する。つまり $(l \Leftrightarrow -\nu) = b_{\nu,l}(\ )$ 。これは、1.3節より、lとνの片方の因子が存在するときのみ、それを入れ替える。どちらもない場合や両方ある場合は0になり相互作用はしない。つまり、

$\nu,\ \ l$	相互作用する
$1, \nu\wedge l$	相互作用しない

他の基本相互作用も同様である。上の表2で平字の元が弱い相互作用に反応する元であり、波下線の元は反応しない元で、ちょうど半分ずつある。q, lは電荷因子であり、それぞれ、1/3, −1の電荷に対応しており、これを含む元の電荷はその総計になる。ホッジ双対に対しては、反へリシティの反粒子を対応させることになる。

これはGeorgi & Glashow (1974) のSU(5) 模型と「同じ」ではない。彼らの模型では基礎因子が (ν_L, e_L^-, $\overline{d^R}_L$, $\overline{d^G}_L$, $\overline{d^B}_L$) の場合に相当し、クォーク部分のへリシティが逆になっ

ている。対応する高次の元も部分的に捻じれている。彼らの模型のX, Yボソン（これは核子の崩壊を予言することになったのだが）に相当するものは、$b_{\nu,q}, b_{l,q}$であるが、これは表(1.4.2)を見ればわかるように、ヘリシティが対応してらず、それらの存在は角運動量の保存則を破りかねない。これが1.1節で述べた「第一の代償」である。これらの粒子はゴーストのように時空の描像と合わないので「実在」できないが、角運動量の異常を引き起こしている可能性がある（註1）。

1.5　質量項としてのニュートリノ因子

上の表1.4.1においてν因子を持つ元と持たない元は、外積代数の性質から丁度半分あり、ニュートリノ以外では、右巻きと左巻きに対応している。つまり、ν因子は「左右因子」になっている。この表示を「実在」の構造と考えるなら、ν因子が付いたり消えたりすることは右巻きと左巻きを混合することにあたり、ディラック質量に関係する。それは1.3節の⑥より作用素 $T_{RL} \equiv T_\nu = a_\nu + a_\nu^\dagger$ の作用である。$T_{RL}^2 = 1$ なので、この作用素との時間当たりの結合率がディラック質量の起源になりえる。ニュートリノだけは、ホッジ双対である反粒子と混合させるしかなく、質量の起源が違う。また、未発見のアクシオンの存在にも制限がかかる。

づづいて、この五元外積模型を拡張して世代を考えた六元模型を作るが、その前に興味深い研究を紹介しよう。

2．標準モデルの変数を説明する諸説（註2）

2.1　小出のレプトン等式

1980年代の目論見では、大統一より大きな理論は、標準理論で説明できない部分を説明できるはずであった（註3）。とりわけ説明できない重要な部分の例は、標準模型の自由度を含む部分である、例えば各素粒子の質量や結合定数、世代の混合角そして世代数等である。その自由度は少なくとも18個あった。これらの約束は30年たった今でも果たされていない。それどころか、ダーク・エネルギーや宇宙の加速膨張のような定性的な部分も、主な理論は予測しなかった。むしろ、統一理論の候補たる模型が大きくなって説明すべき変数が激増している。

しかしながら、ここに謎の公式がある。それは小出のレプトン等式である。素粒子の世代は、質量と弱い相互作用で傾いた関係性がある以外は等しく見える。小出(Koide, 1983)は、電子族レプトン三世代の質量の間に一つの関係を「発見」した。小出の公式はm_xをレプトン質量として以下の関係にあるとする。

$$m_e + m_\mu + m_\tau = \frac{2}{3}\left(\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau}\right)^2 \qquad (2.1.1)$$

電子とミューオンは半世紀前から知られており、したがって質量の測定値も正確であり、最も重いタウオンの質量がもっとも不正確である。そこで、タウオンを「公式」にしたがって計算してみると1776.97MeVになり、実験値の質量1776.9MeVと5桁程度の精度で合っている。実は提唱された当時 (Koide,1983)、実験値とは三桁しかあっておらず、少しずれていたので、彼は補正項を入れる議論をしている。しかし、より厳密で正確な測定によって補正項がいらなくなった。そういう意味で驚異的な「公式」である。

この等式の意味を考えていこう。小出の表記に従い、レプトンの種類 x の質量の正値平方根 $\mathrm{v_x} = \sqrt{m_\mathrm{x}}$ を導入する。これは ν と判別しにくいので例外的に平体 v で表すことにする。

$$(\mathrm{v_e^2} + \mathrm{v_\mu^2} + \mathrm{v_\tau^2}) = \frac{2}{3}\left(\mathrm{v_e} + \mathrm{v_\mu} + \mathrm{v_\tau}\right)^2 \tag{2.1.2}$$

この式では三つのレプトンの間に対称性がある。小出は、これがあるポテンシャルの極小条件と、それに対応する正エルミート行列の三つの固有値に対応する三次方程式の解（すべて正数）の対称性に対応すると考えている。数学的にみれば、ベクトル $\mathbf{v} = \left(\mathrm{v_e}, \mathrm{v_\mu}, \mathrm{v_\tau}\right)$ とすると、(2.1.2) は L_1 ノルムと L_2 ノルムの関係を与えている (この違いの応用例は蔵&蔵 [2012] を参照）。また質量よりその平方根が基本だというのも意味深長である。これらの意味については、後篇において再考する。

さらに三元の置換群 $\mathfrak{S}_3$ の規約表現類をうまく選ぶことにする (小出， 2006)。$m_\tau > m_\mu > m_e$ なので、式 (2. 1. 2) を変形すると、

$$\left(\frac{\mathrm{v_\tau} + \mathrm{v_\mu} - 2\mathrm{v_e}}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{v_\tau} - \mathrm{v_\mu}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{v_e} + \mathrm{v_\mu} + \mathrm{v_\tau}}{\sqrt{3}}\right)^2 \tag{2.1.3}$$

になるので、合わせて

$$\mathrm{v_\sigma} = \frac{\mathrm{v_e} + \mathrm{v_\mu} + \mathrm{v_\tau}}{\sqrt{3}}, \quad \mathrm{v_\eta} = \frac{\mathrm{v_\tau} + \mathrm{v_\mu} - 2\mathrm{v_e}}{\sqrt{6}}, \qquad \mathrm{v_\pi} = \frac{\mathrm{v_\tau} - \mathrm{v_\mu}}{\sqrt{2}} \tag{2.1.4}$$

と再定義すると、(2. 1. 2) は

$$\mathrm{v_\eta^2} + \mathrm{v_\pi^2} = \mathrm{v_\sigma^2} \tag{2.1.5}$$

と簡潔になる。そして顕著な対称性から入れ替え、$\mathrm{v_e} \Leftrightarrow \mathrm{v_\tau}$を行っても同様な式がなりたつ。つまり、

$$\mathrm{v_\sigma} = \frac{\mathrm{v_e} + \mathrm{v_\mu} + \mathrm{v_\tau}}{\sqrt{3}}, \quad \mathrm{v_x} = \frac{2\mathrm{v_\tau} - \mathrm{v_\mu} - \mathrm{v_e}}{\sqrt{6}}, \qquad \mathrm{v_y} = \frac{\mathrm{v_\mu} - \mathrm{v_e}}{\sqrt{2}} \tag{2.1.6}$$

と定義しても、やはり、

$$\mathrm{v_x^2} + \mathrm{v_y^2} = \mathrm{v_\sigma^2} \tag{2.1.7}$$

が成り立つ。これらは形式上なぜか「ピタゴラスの定理」そのものである。

また小出 (Koide, 1981, 2006) は、クォークの第一世代と第二世代の混合を表すカビボ (Cabbibo) 角 θ_c もレプトン質量から、

$$\tan(\theta_c) = \frac{\mathrm{v_x}}{\mathrm{v_y}} = \frac{\mathrm{v_\mu} - \mathrm{v_e}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{6}}{2\mathrm{v_\tau} - \mathrm{v_\mu} - \mathrm{v_e}} \fallingdotseq 0.22 \ldots \tag{2.1.8}$$

と表されると主張した。この予想も三桁の精度で一致している。

さらに、弱い相互作用でレプトンを混合するMNS行列は、クォークの混合よりも大きな大角度行列であることが分かってきたが、小出の意見によれば、三二最大混合(tribimaximal mixture)の行列（本論文ではM_{tbm}と略記する）であるという。これは複素位相の５つの任意性を除いて、以下の形の行列である。表示は対角要素が最大の正値になるようにしてある。

$$M_{tbm}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad M_{tbm}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\qquad(2.1.9)$$

そして、ニュートリノの世代は電荷レプトンに対応する軸と固有質量対応の軸の違いによって傾いており、

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\\ \nu_\tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_\eta\\ \nu_\sigma\\ \nu_\pi\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}\nu_\eta\\ \nu_\sigma\\ \nu_\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\\ \nu_\tau\end{pmatrix}\qquad(2.1.10)$$

になるとする。この(2.1.10)はv（ブイ）ではなくてν（ニュー）であるが、まさに関係式(2.1.4)、そのものである（一部が－１倍になる関係は、対角要素を正値したための見かけ上のもの）。

この行列の数学的意味は何なのだろうか？　(2.1.9)の変形を見れば分かるが、三二最大行列とは、上下の二つの同じ量と、真ん中の一つの別の量があったとき、それらを混合して（L_2ノルムで）「等量」にする行列なのである。これと同じ働きをするユニタリー群の自由度があり、かつ、それは世代のゲージ自由度と見なせる。

一方、クォーク世代の水平対称性については小西らの研究が、特筆すべき成果を収めている（小西, 2013）。彼らはクォーク質量に関係した10個のパラメーター、そして追加の整数的な仮定を加えると４つの基本パラメーターで、CMK行列の混合角の大きさ等が二桁程度の精度で概算できることを示した。これらの意味については、後篇において考察する。

これらの推測がすべて正しいならば、標準理論の模型の自由度を総計六つ以上も下げていることになる。ここで注意を促したい。これらの論文で発見された関係を説明するために、未知の対称性と未知の粒子や場を導入するのは、本末転倒であるということである。

２．２　小出の公式の問題点

小出は、1980年代にこのような驚異的な関係式(2.1.2)と(2.1.8)を見出したのではあるが、なぜレプトン公式が成り立つのかについて説明できなかった（註４）。

この公式はクォークやニュートリノではうまくいかず、電子系レプトンのみ成り立つ。さらに重大なことは、高エネルギー領域や超対称性模型において、なぜか精度が著しく落ちる点である（Li & Ma, 2006）。それを示すために、質量の平等性の指標といえる変数k_lを導入する。

$$k_l = \frac{3(m_e + m_\mu + m_\tau)}{2(\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau})^2} \qquad (2.2.1)$$

小出の等式(2.1.2)は $k_l = 1$ ということに等しい。そして実測値からのズレは±0.00003以下の精度である（Li & Ma, 2006）。

質量はすべて正のため、これには$1/2 \leq k_l \leq 3/2$の範囲があり、すべての質量が等しく完全な対称性があるときに下限1/2をとり、一つのみが質量を持ち、他の二つが０に近い非対称性が最大のときに上限3/2=1.5をとる。つまりk_lは世代間質量の非対称性の一つの指標になっていて、対称性が完全なほどk_lが小さくなるという性質を持つ。小出の式は、ちょうど良いぐらいの非対称性という、謎の意味がある。

問題なのはエネルギーレベルによって素粒子の有効質量が異なってくることである。そして、小出の公式の精度は、τが存在しはじめる約1.8GeV程度の低エネルギーレベルでの話しなのである。計算例を（Li & Ma, 2006）より引用する。

表（2.2.2）　上は標準模型、下は最小超対称模型の場合

	m_e (MeV)	m_μ (MeV)	m_τ (GeV)	k_l,
91 GeV	0.48684727	102.75138	1.7467	1.001881
10^9GeV	0.51541746	108.78126	1.8492	1.001881
2×10^{16} GeV	0.49348567	104.15246	1.7706	1.001888
91 GeV	0.48684727	102.75138	1.7467	1.001881
10^9GeV	0.40850306	86.21727	1.4695	1.002277
2×10^{16}GeV	0.32502032	68.59813	1.1714	1.002560

小出の公式からのτの質量の計算値は1.77697GeVであり、低エネルギーの世界では実測値と５桁の精度を持つが、Ｚボソンの質量m_Z(=91GeV)の弱電統一レベルになると、すでに３桁ぐらいの精度に落ちてくる。さらに最小超対称模型ではもっとずれる。表(2.3.2)では、上が標準理論、下が最小超対称模型（Susy＋標準理論）の場合である。ちなみに91GeVは弱電統一理論のＺボソンの質量であり、このレベルで既にk_lが１から0.002程度だけずれており、２桁精度が下がっている。2×10^{16}GeVは大統一理論のエネルギーレベルである。超対称模型だともっと悪くなっている。基本的にどんな理論であれ量子補正を受けるので、このようなズレは不可避に思える。

小出の等式は単純だが、普通このような単純さは高エネルギーにおいて、低エネルギーでは破れている対称性が回復したときに存在しやすいはずである。しかし小出の公式は逆に低エネルギー極限だけで良く成り立っている。しかし、低エネルギー極限の有効理論と見なしても、このズレは微妙である。高エネルギーで小出の公式の法則性が失われるのなら、プランクエネルギーに４桁程度しか違わない2×10^{16}GeVでは、もっとずれてよい。

さらに、常識ではエネルギーレベルが上がるほど、自発的な対称性の破れが回復するはずである。よって素粒子の世代が本質的に「民主的」で平等だとすると、高エネルギーになるほど、k_lの値は下がり1/2に近づくはずだ。しかし、表(2.2.2)を見るとそうなっておらず、逆に上がっている。要するに高エネルギーで世代の平等は回復しない。もちろん、世代は単純な標準理論や超対称理論の枠外にあるが、これは根本的に謎なのである。

これを回避するために、たとえばSumino(2009)では「小出の公式の量子電磁力的な修正をうち消すメカニズム（a mechanism for cancelling the QED correction to Koide's formula)」として新たなゲージ群U(3)と光子による補正を相殺するボソンを導入している。だが、これは小出の公式の簡潔性と標準理論のパラメーターを一つ下げるという長所を失っている。Sumino(2009)は「隅野の公式」と呼ぶべき新たな式を導入していて、これもそれなりの精度をもっている。この意味についても後篇で議論する。

そもそも低エネルギーレベルの有効対称性といえば、陽子と中性子の対称性である歴史的なアイソスピンが思い浮かぶ。この場合、陽子の質量は938.272MeVなのに対して、中性子の質量は939.573MeVであり、３桁目から異なる。一方、小出の公式は最低５桁以上あっている。そんなにうまくいく有効ゲージ理論があるのだろうか。

小出の公式は偶然なのだろうか？　しかし、似たような式が10^5個以上は作られていないと、このような偶然は起こりがたい。偶然でないなら、高エネルギーで対称性が回復して平等になるという大統一系の理論の暗黙の常識が誤っていると考えるしかない。

２．３　外積模型の基本仮定への留意点

本論文で示された模型が、サブ・クォーク模型と一種と考えるのは正確ではない。この因子は時空間の内部にある「粒子」ではなく、内部空間の構造そのものであり、時空間の創造と前後して成立したものと考えるのが自然である。

そもそも、小出の等式ではエネルギーの次元を持つ質量ではなく、その平方根が基礎であることからして、ローレンツ変換とは相性が余り良くない。むしろ回転を含むローレンツ対称性の方が後から生じた有効的な対称性である可能性でさえある。すなわち角運動量が保存されるようになった後で生じたのである。これは「第二の代償」である。小出の等式が真の法則の一端ならば、その高エネルギーでの破れは、常識とする時空の描像が低エネルギーの世界でしか有効に成り立っておらず、Zボソンの質量10^2GeVぐらいで、すでに

10^{-3}程度の壊れがあることを示唆している。

たとえば「核子スピンの謎」、つまり陽子や中性子のスピンは、それを構成しているはずのクォークやグルーオンが担っていない問題は説明しがたい大きな謎である。この問題の最初の報告（EMC Collaboration, 1988）から四半世紀たったが、精密な実験で「謎」が確定しただけである。軌道角運動量に担わせるという意見が多いが、角運動量は半径と運動量の外積なので、核子の半径は小さすぎるように見える(註5)。少なくともQCDの研究者たちが、このズレを事前に予測しなかったことを指摘しておこう。

もう一つは磁気単極子である。原初は平等であったという大統一系の理論では弱電統一への相転移の時に、離れた部分で別の向きに対称性が破れるために、不整合の捻じれが不可避に起こるのである。その中で0次元の捻じれが磁気単極子に相当し、大量に表れる（'t Hooft, 1974; Polyakov, 1974）。これが発見されないことも問題だが、その性質も問題であろう。

磁気単極子はDirac（1931, 1948）により導入されて、電荷の整数的な離散性を説明するとされる。その論理は、磁気単極子とそれから定まる最小単位以下の電荷とは、「矛盾する」から、この世界が「矛盾」しないためには、電荷が離散化されることが「必要」なのである。そして「現実が存在」していて、電荷が離散化されているので、磁気単極子が存在するのだろうという論理である。

しかし磁気単極子は、場の理論との整合性を考えると大変に性質が悪く、ローレンツ変換のみならず、回転でさえ普遍にならないことは、早くから指摘されていた（Hagen, 1965; Weinberg, 1965）。つまり、磁気単極子を導入すると、それが絶対的な時空軸を指定してしまう。これはそもそも、磁気単極子を必須とする大統一系の理論と、時空の描像との矛盾の一つを示しているのであろう。

３．六元外積模型への方針

３．１　六元への拡張への留意点

五元外積模型は捩じれたSU(5)とも見なせ、世代を全く表していない。そこで世代表すための新しい因子ξを加えた模型を考える。すると基礎構成要素は、

$$(\xi, \nu, l, q, q, q)$$

になる。これから外積代数を作るが、元の数は2^6=64であり、五元模型の二倍しかない。一方、素粒子の世代は三つで五元模型の約三倍必要である。まず、この数の問題を解決しなければならない。そこで、二つの案がありえる。

（第一案）弱い相互作用をするヘリシティは三世代あるが、しないヘリシティでは一つしかない。

（第二案）本質的な世代は二世代しかなく、残る一世代は、弱い相互作用での不活性元を加えて混ぜ合わせる。その（複素）混合比の違いによって三つに見える。

「第一案」は、ディラック方程式などに重大な変更を与える、世代が簡単に振動するなどの欠点により、どうにもならない案のように思える。そこで後篇では「第二案」を検討しよう。この第二案には、顕著な長所がある。それは、アップクォーク族とダウンクォーク族、電子族とニュートリノ族で、（複素）混合比を変えることによって、弱い相互作用で世代軸が傾いて対応させせることができる点である。

もう一つ注目すべき点は、ホッジ双対である。全因子数nが奇数の時は単に余因子を採ればいいが、偶数の時では因子数kが奇数のとき、係数(−1)が付くのである。正確には$(-1)^{k(n-k)}$の係数が付く。五元模型ではこれは意味がないが、六元模型ではホッジ双対に－1が付く場合がある。つまり物質と反物質を対応させる位相が因子数によって変わりえる(反物質の基底に－１が付く場合とつかない場合がある)。混ぜ合わせと組み合わせると、弱い相互作用の対応軸が自然に歪むことになる。これについて、論文の後篇では具体的な対応を考える。

３．２　後半の大まかな方針

この論文で示された模型は、外積代数にユニタリー群を作用させるだけであり、数学的に極めて単純なものである。また、発見されていない素粒子の導入をしない方針で模型構築を試みている。

後編では、六元外積模型から物質と反物質の違いなどの性質、小出の質量公式や、カビボ角などの導出を試みる。基本的な方針は以下の通りである。

① 弱い相互作用の混合角は、ニュートリノの基本特性と電子系レプトンの電荷等分との乖離に由来している。具体的にはMNS行列は、三二最大(tribimaxmal)行列の一種であり、電荷を混合して等分する行列である。その自由度をヒッグスボソンの類似物と見なす。

② クォーク対応を表すCMK行列は、MNS行列と外積模型から派生すると考える。

③ トップクォーク(173GeV)とヒッグスボソン(126GeV)は類似した質量レベルであり、またW, Zボソンとも近い。この由来を考察する。

④ この模型ではニュートリノを除いて、左右のヘリシティで因子数が必ず１違う。よって、ホッジ双対を取れば必ず－１倍違うことになる。これから、物質と反物質の性質の違いを導く。

註

（註１） 観察しない中間過程において「一時的にエネルギー・運動量保存則を破っても良くて、最終的に保存されれば良い」という素粒子の計算規則は、実測値と合うという意味で成功している。しかし公理としては場当たり的であり、もっと根本的な原理から導出すべきである。我々の案は（蔵＆蔵, 2014）に示されている。それは等距離近傍の中で、途中の局所的な凹凸を除いて、もっとも簡単な（つまりエントロピーの低い）世界を過去と認識するということである。エネルギー･運動量保存則を破った「過去」は、それを守っている過去より遥かに数が多く、「単純」とはいえない。途中の凸凹が一時的に保存則を破った世界であろう。角運動量保存則にも、これが適用可能であり、核子の内部のような観察しがたい世界で一時的に破れている可能性がある。

（註２）本章の一部は､著者の一人（蔵琢也）がかつてHPに公開していたものを使っている。

（註３）これは当時の文献では豊富に語られている。たとえば1986年のワインバーグのディラック記念講演では「ひもの理論は標準模型に含まれている17個あるいはそれ以上のパラメーターについて何を予言し得るか」「電子の質量、クォークの質量その他もろもろに関して、ひもの理論は直接何か言うことができるでしょうか。理論物理学者の多くは、いま持っている最も価値あるものに賭けています。この理論は非常に美しいので、物理学の窮極的法則として生き残るだろうと。」（ファインマン＆ワインバーグ, 1990, pp. 92-93）。

しかしワインバーグは21世紀に入ると批判的になった。「もし私が早い時代に生まれ，1905年に特殊相対性理論を発見するという幸運に恵まれていたら，アインシュタインと同じく自分の理論は正しいに違いないという確信を抱いただろう。しかし，超対称性理論に対して，そのような感触を持つことはできない（アクゼル，2011）。」

（註４） 小出の公式は、いろいろやってみて偶然に発見したように見える。事実、小出は間違った「公式」も数多く考案しているので、数秘術やティティウス・ボーデの法則のような感じが否めない。太陽系の惑星の距離についてのチィチィウス・ボーデの法則は、知られている力学原理から誰も導出することができなかったので、今では単なる組み合わせ論的な偶然と見なされている。同じように小出の公式も、どの教科書や総説にも、「事実」として引用されていない。

（註５） この問題はQCDの数学的な難しさや杜撰さの表れというよりも、本質的なものであって、20世紀初めの量子力学の創始期に似たアノマリーを見ているのだろう。

参考文献

アクゼル, A.D.(2011)「統一理論の父ワインバーグに聞く」日経サイエンス, *Feb,* pp.88-93.

Dirac, P. A. (1931) “Quantised singularities in the electromagnetic field”, *Proc. Roy. Soc. Lond. A ,* vol.133, pp.60-72.

Dirac, P. A. (1948) “The theory of magnetic poles”, *Phys. Rev.,* vol.74, pp.817-830.

ファインマン, R.P. & S. ワインバーグ (1990[1987])『素粒子と物理法則』培風館.

EMC Collaboration (1988) “A measurement of the spin asymmetry and determination of the structure function g1 in deep inelastic muon-proton scattering”, *Phys. Lett. B,* vol.206, pp.364-370.

Georgi, H. & S.L. Glashow (1974) “Unity of all elementary-particle forces”, *Phys. Rev. Let.,* vol. 32, pp. 438-441.

Georgi, H. et al. (1974) “Hierarchy of interactions in unified gauge theories”, *Phys. Rev. Let.,* vol.33, pp. 451-454.

Hagen, C. R. (1965) “Noncovariance of the Dirac monopole”, *Phys. Rev.B,* vol.140, pp.804-810.

Polyakov, A. M. (1974) “Particle spectrum in quantum field theory,” *JETP Lett.* vol.20, pp.194-195.

Koide, Y. (1981) “New formula for the Cabibbo angle and composite quarks and leptons”, *Phys. Rev. Lett.* vol.47, pp.1241-1243.

------------- (1982) “Fermion-boson two-body model of quarks and leptons and Cabibbo mixing”, *Lett. Nuovo. Cimento.* vol.34, pp.201-205.

------------- (1983) “New view of quark and lepton mass hierarchy”, *Phys. Rev. D,* vol.28, pp.252-254.

小出義夫 (2006)「問題提起：荷電レプトン質量公式が示唆する質量行列統一理解への道」 http://koide-phys.com/us-hep/workshop/ws05qlmass/WS05qlmass.html.

Konishi, Y. & I. S. Sogami (2010) “Dirac Mass Matrices in Gauge Field Theory of Horizontal Symmetry ” *Prog. Theor. Phys.* vol.123. pp.271-283.

小西康文 (2011)「SU(2)×U(1) 水平対称性に基づくディラック型のクォーク質量行列に関する考察」京都産業大学論集（自然科学系列）vol.40, p.13-22.

蔵琢也＆蔵研也 (2013)「量子ゼノン効果とその影響」*Review of Economics and Information* Studies vol.14, pp.15-34.

------------- (2014)「時間のない物理学について３；観測者の公理とエントロピー時間」*Review of Economics and Information Studies* vol.14, pp.41-61.

Li, N & Ma Bo-Qiang, (2006) "Energy scale independence of Koide's relation for quark and lepton masses", *Phys. Rev. D* vol.73, 013009.

Sumino, Y. (2009) "Family gauge symmetry and Koide's mass formula", *Phys. Lett. B* vol.671, pp. 477–480.

Super-Kamiokande Collaboration (2009)"Search for Proton Decay via $p \to e^{+}\pi^{0}$ and $p \to \mu^{+}\pi^{0}$ in a largewater Cherenkov detector", *Phys. Rev. Let.,* vol.102, 141801.

't Hooft, G. (1974) "Magnetic monopoles in unified gauge theories", *Nucl. Phys. B,* vol.79, pp.276-284.

Weinberg, S. (1965) "Photons and Gravitons in Perturbation Theory: Derivation of Maxwell's and Einstein's Equations", *Phys. Rev. B,* vol.138, pp.988-1002.